

Hyperrationale Zahlen und reelle Grenzwerte

Stefan Basiner

Zusammenfassung: Reelle Zahlen basieren auf Vorstellungen von Grenzwerten, von denen in der Schule zunächst aber keine Rede ist. Später treten Grenzwerte zur Einführung der Differential- und Integralrechnung auf. Auch da findet wohl meist keine Reflektion des zugrundeliegenden Zahlenbegriffs statt. Unendliche Mengen verschwinden in der Routine einfacher Ableitungsregeln und erst recht mit dem Taschenrechner. Hier soll ein alternativer Weg in die Analysis vorgestellt werden, der mit infinitesimalen und infiniten Größen noch vor der Einführung von \mathbb{R} bereits Elemente der Integral- und Differentialrechnung impliziert und zu einem Grenzwertbegriff führt. Um das damit verbundene Potential einer effizienten Propädeutik auszuloten, werden neben den formalen, mengentheoretisch orientierten Konstruktionen die leitenden Gedankengänge in einfachen Schritten zugunsten eines überblickenden Verständnisses hervorgehoben.

Einleitung

Als vor ca. 65 Jahren die hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ konstruiert wurden, stützte man sich dabei auf den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen und rehabilitierte die Infinitesimalzahlen. Aber muss man sich wirklich auf \mathbb{R} stützen, um einen linear geordneten Rechenkörper zu erhalten, der die Rationalzahlen konservativ um Infinitesimalzahlen erweitert? Nein, lautete schon 1973 die Antwort, auf die noch 2007 in einer Publikation hingewiesen wurde¹. Dort erschien die Konstruktion hyperrationaler Zahlen ${}^*\mathbb{Q}$ als ein Spezialfall eingebettet in viel allgemeiner gefasste Überlegungen zu sog. Ultraprodukten von mehr oder weniger reich strukturierten Mengen. Beschränkt man sich zielstrebig auf das Wesentliche, was der Konstruktion von ${}^*\mathbb{Q}$ genügt, so erscheint der Sachverhalt recht einfach überschaubar und kann konkreter erläutert werden. Das Interesse an infinitesimalen Größen, denen im 19-ten und bis ins 20-ste Jahrhundert einige Ablehnung entgegengebracht wurde, resultiert einerseits aus ihrer intuitiv-anschaulichen Bedeutung für das Verständnis der Differential- und Integralrechnung, die ja nicht auf den historischen Zeitraum ihrer Entwicklung beschränkt ist. Andererseits ist die Grenzwertterminologie mit Umständlichkeiten behaftet, die mit der Einführung von Infinitesimalzahlen vermeidbar sind, sodass sich daraus auch erhebliche praktische Vorteile ergeben.

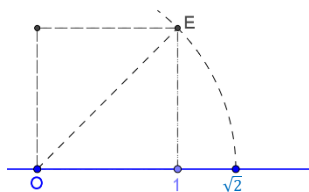
Beide Gesichtspunkte sind für den Schulbetrieb von Belang, wo die Erarbeitung solider theoretischer Grundlagen durchaus in Konkurrenz zum Trend nach Anwendungsvielfalt geraten kann. Um bei einer Abiturprüfung ein sehr gutes Mathematik-Ergebnis zu erzielen, muss man nicht wissen, was eine reelle Zahl ist, spezieller: was eine Irrationalzahl dem Begriffe nach ist. Es reicht da, z.B. $\sqrt{2}$, π und e als Irrationalzahlen zu „wissen“. Wenn bei der Einführung des Koordinatensystems noch in naiv anschaulicher Weise vorgegangen werden kann, muss doch bei der Einführung der Integral- und Differentialrechnung eine echte Grundlage bereitgestellt sein². Wo kann ein propädeutischer Grenzwertbegriff besser erarbeitet werden als bei einer Neubetrachtung der reellen Zahlen? Es ist lohnenswert, in einer nicht unnötig abstrakten Sprache darzulegen, wie man über den „Umweg“ infinitesimaler Zahlen zu

¹ G. H. Meister and J. D. Monk 1973: Construction of the reals via ultrapowers. Rocky Mountain J. Math. 3, 141-158. Zitiert in: H. Salzmann, T. Grundhöfer, H. Hähl, and R. Löwen: The Classical Fields – Structural Features of the Real and Rational Numbers, Cambridge University Press, Cambridge 2007, Section 23; Seite 154-163.

² „Die Schülerinnen und Schüler [...] vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, ...“. Quelle, aufgerufen April 2025: <https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik/mathematik-klp/kompetenzen/index.html>. Siehe dort: 2.4 Kompetenzerwartungen und inhaltliche Schwerpunkte bis zum Ende der Qualifikationsphase.

den reellen Zahlen gelangen kann. Denn man erhält damit nicht nur einen Grenzwertbegriff, sondern auch ein Rüstzeug für Themen von Stetigkeit sowie für Verfahren der Differential- und Integralrechnung. Dass dieser Weg $\mathbb{Q} \rightarrow {}^*\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ in einfachen Schritten gangbar ist, soll gleich gezeigt werden. Zunächst soll aber die Kritik an der häufig anzutreffenden, zu oberflächlichen Behandlung der reellen Zahlen wenigstens kurz angedeutet werden, um damit fachliche Offenheit für Alternativen anzuregen.

Der simple Weg zur reellen Zahlengeraden



Man bemerkt, dass das Quadrat einer Rationalzahl niemals 2 ergibt. Dann konstruiert man ein Einheitsquadrat, überträgt wie links skizziert den Eckpunkt E auf die Grundlinie und spricht: „Nach Pythagoras ist *hier* $\sqrt{2}$ “. Man erklärt: „Lücken in der Menge \mathbb{Q} der Rationalzahlen heißen *Irrationalzahlen* und ergeben zusammen mit \mathbb{Q} die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. So, wie die Gerade von Anfang an keine Lücken hat, entsprechen die reellen Zahlen eindeutig den Punkten auf einer skalierten Geraden, die dann die *reelle Zahlengerade* heißt.“

Die Anschaulichkeit einer Geraden wirkt natürlich überzeugend. Und der „Punkt“ $\sqrt{2}$ „existiert“ schon, bevor man nach einer Theorie rationaler Folgen suchen muss. Und wenn man überhaupt das Problem konvergenter Folgen anspricht, sei es auch nur, um den zauberhaften Taschenrechnern auf die Spur zu kommen, so liegt hier „das Ziel der Konvergenz“, immerhin klar vor Augen. Der Punkt gibt Sicherheit. Dieses Sicherheitsgefühl ist aber nicht im Entferntesten ein propädeutisches Begreifen der geistigen Schöpfung³ des Zahlenbegriffs \mathbb{R} . Nur in einer dünnen Menge algebraischer Irrationalzahlen kann man wie oben konstruktiv vorgehen. Und später, bei einem bestimmten Integral, bewegen sich die Summenfolgen schon gar nicht auf einen gegebenen Punkt zu. Anschauliche Assoziationen werden da ganz andere sein können und müssen. Im Allgemeinen existiert ein Grenzwert nicht als ein sinnlich gegebenes, sondern nur als ein theoretisch fragliches Objekt. – Und diese Situation tritt eben vor der Differential und Integralrechnung schon bei den Irrationalzahlen auf und sollte deshalb auch vorher ernsthaft behandelt werden, z.B. im Zuge einer *Neubetrachtung* der reellen Zahlen.

Stellt man sich der Grenzwertproblematik, so ist das allerdings keine leichte didaktische Herausforderung. Dies macht verständlich, dass in Schulen eine begriffliche Behandlung der reellen Zahlen oft unterbleibt. Aber das Vorgehen: „Seht her, nach Pythagoras betrifft *das Zahlenproblem* $\sqrt{2}$ genau diese Stelle auf unserer Geraden – wir haben das Problem lokalisiert, wir haben es hier sichtbar gemacht, also haben wir es gelöst“ – dieses Vorgehen stumpft etwas Wesentliches für die Mathematik ab: das Gespür für *begriffliche* Überzeugungskraft.

Die Konstruktion der hyperrationalen Zahlen ${}^*\mathbb{Q}$

\mathbb{N} bezeichne im Folgenden die Menge der *positiven* natürlichen Zahlen.

i, j, k, m, n sind Variable nur für Werte aus \mathbb{N} . Damit bedeutet $\forall n$ dasselbe wie $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\tilde{\forall} n$ wird „für fast alle n gilt“ gelesen. $\tilde{\forall} n p(n) := \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus \{n \mid p(n)\}$ ist eine endliche Menge (evtl. leer).

$\tilde{\tilde{\forall}} n$ wird „für genügend viele n gilt“ gelesen. $\tilde{\tilde{\forall}} n p(n) := \Leftrightarrow \{n \mid p(n)\} \in \mathcal{F}$ (zu $\mathcal{F} \subset \wp \mathbb{N}$ siehe Punkt vi.).

³ In der zu ² zitierten Quelle ...mathematik-klp/aufgaben-ziele/index.html heißt es ganz grundsätzlich, dass den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe drei „Grunderfahrungen“ ermöglicht werden sollen, an zweiter Stelle die folgende Grunderfahrung:

„... mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als *geistige Schöpfungen* [Hervorhebung SB], als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art erkennen und weiterentwickeln (*Mathematik als Struktur*)“.

Um die stringente Gedankenentwicklung des Weges $\mathbb{Q} \rightarrow {}^*\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ schlicht beschreiben zu können, werden technische Details und Beweise in Fußnoten ausgeführt. Die folgende Konstruktion von ${}^*\mathbb{Q}$ stellt nur eine Abwandlung einer üblichen Konstruktion der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ dar.⁴

- i. Man erkennt, dass alle Rationalzahlen eine periodische Dezimaldarstellung haben. Man kann leicht nicht-periodische Zahlen erfinden, z.B. $a = 1,010010001$ usw. (mit immer längerer 0-Serie bis zur nächsten 1). Um den Kehrwert $1/a$ zu berechnen, ist es naheliegend, a schrittweise unter Berücksichtigung von immer mehr Dezimalstellen abzurunden, sodass a als unendliche Folge (a_n) rationaler Zahlen vorliegt. Das legt ein rechnerisches Interesse an rationalen Folgen nahe.
- ii. Wir betrachten die Menge \mathbb{Q}^∞ aller rationalen Folgen als neuen Zahlenbereich. Indem wir jede Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit ihrer konstanten Folge (q, q, q, q, \dots) identifizieren, ist \mathbb{Q}^∞ eine Erweiterung von \mathbb{Q} . Folgen $a, b \in \mathbb{Q}^\infty$ kann man addieren $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$ und multiplizieren $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$, aber nicht immer teilen. Die Relation $a \leq b$ soll gelten, wenn $a_n \leq b_n$ für alle Indizes gilt. Die Übertragung der Punkt- und Strichrechnung von \mathbb{Q} nach \mathbb{Q}^∞ ergibt nichts Überraschendes, z.B. ist $\frac{14}{3} \cdot \frac{-3}{7} = (\frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \dots) \cdot (\frac{-3}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-3}{7}, \dots) = (-2, -2, -2, -2, \dots) = -2$. In diesem Sinne ist \mathbb{Q}^∞ eine *konservative Erweiterung* von \mathbb{Q} . Allerdings ist \mathbb{Q}^∞ nicht nullteilerfrei, d.h. ein Produkt kann null sein, obwohl kein Faktor null ist: $(1, 0, 1, 0, 1, \dots) \cdot (0, 1, 0, 1, 0, \dots) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots) = 0$.

In \mathbb{Q}^∞ sind also manche Berechnungen nur eingeschränkt möglich, und $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ scheint als „Zahl“ auch nicht sinnvoll zu sein. Der Umfang von \mathbb{Q}^∞ soll daher reduziert werden, damit ein Rechenkörper entsteht, in welchem die genannten Einschränkungen nicht mehr bestehen, aber doch nicht-periodische Zahlen darstellbar sind. Aus der Bruchrechnung ist uns bekannt, dass verschieden aussehende Brüche wie $\frac{3000}{7000}$ und $\frac{351}{819}$ dasselbe wie $\frac{3}{7}$ bedeuten und in Äquivalenzklassen zusammengefasst werden. Dass so etwas auch mit \mathbb{Q}^∞ möglich ist, zeigt das folgende Beispiel:

- iii. Stimmen zwei Folgen a, \tilde{a} in *fast allen* Folgengliedern überein, nennen wir sie *äquivalent* und schreiben $\checkmark n(a_n = \tilde{a}_n)$ oder $a \approx \tilde{a}$. Dann gilt $a_n \neq \tilde{a}_n$ für höchstens endlich viele Indizes n .

$$(a_n) \approx (\tilde{a}_n) :\Leftrightarrow \checkmark n(a_n = \tilde{a}_n). \quad \text{Wir nennen } \{n \mid a_n = \tilde{a}_n\} \text{ eine } \textit{kofinite} \text{ Menge}^5.$$

Und \mathcal{F}_0 bezeichne die Gesamtheit sämtlicher kofiniter Teilmengen von \mathbb{N} .

Alle zu einer Folge (a_n) äquivalenten Folgen fassen wir zu einer *Äquivalenzklasse*⁶ zusammen und bezeichnen sie mit $\langle a_n \rangle$ oder griechischem Buchstaben α . So haben wir Zahlen neuen Typs.

Was haben wir erreicht? Wenn z.B. eine Folge (a_n) Nullstellen hat, gibt es für sie keinen Kehrwert. Wenn aber die Nullstellen nur eine endliche Indexmenge bilden, so kann man jetzt jede Null z.B. durch 1 ersetzen und erhält damit eine *äquivalente* Folge (\tilde{a}_n) , deren Kehrwert $(1/\tilde{a}_n)$ berechenbar ist. Damit ist $1 : \langle a_n \rangle := \langle 1/\tilde{a}_n \rangle$ gesetzt. Mit anderen Worten: Tritt in einer Folge $(1/a_n)$ an höchstens endlich vielen Stellen ein Bruch mit null im Nenner auf, so können wir das ignorieren. Und gilt für zwei Folgen a, b *fast immer* $a_n \leq b_n$, so ignorieren wir in gleicher Weise die Stellen, wo die Relation $a_n > b_n$ auftritt, weil es höchstens endlich viele Indizes betrifft. Das heißt:

$$\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle :\Leftrightarrow \checkmark n(a_n \leq \tilde{a}_n). \quad \text{Im Überblick der beiden Definitionen gilt also:}$$

$$\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n = \tilde{a}_n\} \in \mathcal{F}_0 \quad \text{und} \quad \langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n \leq \tilde{a}_n\} \in \mathcal{F}_0.$$

⁴ Siehe z.B. Thomas Bedürftig, Peter Baumann, Volkhardt Fuhrmann (Hrsg.) „Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard“ Springer Spektrum 2022

⁵ $M \subseteq \mathbb{N}$ *kofinit* $:\Leftrightarrow \bar{M} = \mathbb{N} \setminus M$ endlich. Die Menge \mathcal{F}_0 ist Teil der Potenzmenge $\wp \mathbb{N}$.

⁶ \mathcal{F}_0 ist ein sogenannter Filter. Die folgenden Filtereigenschaften garantieren, dass \approx eine Äquivalenzrelation ist:

$$\begin{array}{ll} \text{I}_{\text{FE}} & \emptyset \notin \mathcal{F} \quad [\text{also gilt } a \approx b \text{ nicht immer}] \\ \text{II}_{\text{FE}} & (M \in \mathcal{F} \wedge M \subseteq \tilde{M} \subseteq \mathbb{N}) \Rightarrow \tilde{M} \in \mathcal{F} \quad [\text{also ist } \approx \text{ reflexiv}] \\ \text{III}_{\text{FE}} & (A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \quad [\text{also ist } \approx \text{ transitiv}] \\ \text{IV}_{\text{FE}} & \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M = \emptyset \quad [\text{also gilt } \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}]. \end{array}$$

Wir haben die Relation \leq erweitert und die Möglichkeiten der Kehrwertbildung.

- iv. Immer noch sind aber z.B. $\alpha = \langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$ und $\beta = \langle 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$ „problematische Zahlen“. Um eine Relation $\alpha \leq \beta$ oder $\alpha > \beta$ zu rechtfertigen, reicht es nicht, nur endlich viele Folgeglieder zu ignorieren bzw. deren Werte nach Belieben zu ändern. Wir treffen daher eine radikale Entscheidung: Wir ignorieren *bei allen Folgen die Glieder mit geradzahligem Index* und definieren:

$$\langle a_n \rangle \approx \langle \tilde{a}_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = \tilde{a}_n\} \text{ enthält fast alle ungeraden Indizes.}$$

Ist \mathcal{F}_1 die Gesamtheit der Teilmengen von \mathbb{N} , die mindestens fast alle ungeraden Zahlen enthalten,

$$\text{so gilt jetzt: } \langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}_1 \text{ und } \langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}_1.$$

\mathcal{F}_0 wurde nur durch ein *umfangreicheres* \mathcal{F}_1 ersetzt⁷. Die Äquivalenzklasse $\langle a_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$ enthält jetzt die Folge $(\tilde{a}_n) = (1, 1, 1, 1, \dots)$, und $\langle b_n \rangle$ enthält $(\tilde{b}_n) = (0, 0, 0, 0, \dots)$. Damit verstößt $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = 1 \cdot 0 = 0$ nicht mehr gegen die Nullteiler-Freiheit, und es gilt $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$.

- v. Man hätte oben statt der geraden auch die ungeraden Indizes favorisieren können; dem Verfahren haftet also eine gewisse Willkür an. Das Beispiel zeigt aber: Gibt es mit einem System \mathcal{F}_i relevanter Indexmengen immer noch problematische Zahlen⁸, für die weder $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$ noch $\langle b_n \rangle \leq \langle a_n \rangle$ gilt, so entschließt man sich radikal, noch mehr Folgeglieder *in allen Folgen* zu ignorieren und erweitert⁹ \mathcal{F}_i durch ein System $\mathcal{F}_{i+1} \supset \mathcal{F}_i$, mit dem dann die Äquivalenzrelation \approx definiert wird.
- vi. Wir denken uns: Setzt man dieses Vorgehen unbegrenzt fort, so führt es schließlich zu einem *maximalen System* \mathcal{F} von Indexmengen, mit dem es keine „problematischen Zahlen“ mehr gibt¹⁰. Die Festlegung der Äquivalenzrelation und der \leq Ordnung erfolgt dann mit \mathcal{F} wie vorher:

$$\langle a_n \rangle \approx \langle \tilde{a}_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n = \tilde{a}_n\} \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \langle a_n \rangle \leq \langle \tilde{a}_n \rangle :\Leftrightarrow \{n \mid a_n \leq \tilde{a}_n\} \in \mathcal{F}.$$

Die Äquivalenzklassen heißen jetzt *hyperrationale Zahlen*, ${}^*\mathbb{Q}$ bezeichnet deren Gesamtheit. Wie vorher muss die Punkt- und Strichrechnung anhand beliebiger Repräsentanten nur an relevanten Stellen ausgeführt werden. ${}^*\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$ ist eine konservative Erweiterung von $\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$, da Rationalzahlen als konstante Folgen repräsentiert sind. Der Betrag $|x|$ hat in ${}^*\mathbb{Q}$ die übliche Bedeutung.

⁷ Man sieht leicht, dass auch für \mathcal{F}_1 die in ⁶ genannten Eigenschaften I_{FE} bis IV_{FE} eines Filters \mathcal{F} gelten. Zur allgemeinen Konstruktion von \mathcal{F}_1 siehe ⁹. Zur Repräsentantenunabhängigkeit: Sei $\langle a_n \rangle \approx \langle \tilde{a}_n \rangle \wedge \langle b_n \rangle \approx \langle \tilde{b}_n \rangle$. III_{FE} ergibt $\{n \mid a_n = \tilde{a}_n\} \cap \{n \mid b_n = \tilde{b}_n\} \in \mathcal{F}$. II_{FE} ergibt $\{n \mid a_n + b_n = \tilde{a}_n + \tilde{b}_n\} \in \mathcal{F}$, d.h. $\langle a_n + b_n \rangle \approx \langle \tilde{a}_n + \tilde{b}_n \rangle$. Für die Multiplikation ersetze einfach das Plus-Zeichen durch das Mal-Zeichen.

⁸ Es existieren „problematische Zahlen“, wenn es eine Teilmenge $T \subset \mathbb{N}$ gibt mit $T \notin \mathcal{F}_i \wedge \bar{T} \notin \mathcal{F}_i$. Dann sind nämlich $a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in T \\ 0, & \text{falls } n \in \bar{T} \end{cases}$ und $b_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in T \\ 1, & \text{falls } n \in \bar{T} \end{cases}$ vollständig definierte Folgen, für die weder $\langle a_n \rangle \geq \langle b_n \rangle$ noch $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$ gilt, denn $\{n \mid a_n \geq b_n\} = T \notin \mathcal{F}_i$ und $\{n \mid a_n \leq b_n\} = \bar{T} \notin \mathcal{F}_i$.

⁹ Die Erweiterung geschieht wie in iv. nach einer allgemeinen Methode: Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine Menge wie in Fußnote 8, so gilt wegen II_{FE} und $M \cap T \subseteq \mathbb{N} \cap T = T$ auch $\forall M \in \mathcal{F}_i (M \cap T \notin \mathcal{F}_i)$. Also ist $\mathcal{F}_{i+1} := \{\bar{M} \subseteq \mathbb{N} \mid \exists M \in \mathcal{F}_i \text{ mit } M \cap T \subseteq \bar{M}\} \neq \mathcal{F}_i$. Und $\mathcal{F}_{i+1} \supset \mathcal{F}_i$ gilt wegen II_{FE} und $M \cap T \subseteq M$. Zum Nachweis, dass auch \mathcal{F}_{i+1} die Filtereigenschaft I_{FE} erfüllt, beachte, dass $\bar{\emptyset} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}_i$, also $T \neq \emptyset$ wegen $\bar{T} \notin \mathcal{F}_i$ und daher $\forall M \in \mathcal{F}_i (M \cap T \neq \emptyset)$ gilt. Die Filtereigenschaften II_{FE}, III_{FE}, IV_{FE} werden ebenfalls von \mathcal{F}_i auf \mathcal{F}_{i+1} vererbt, wie man leicht sieht.

¹⁰ Die Menge \mathcal{H} aller Filter ist durch \subseteq induktiv geordnet, denn jede vollständig geordnete Teilmenge $\mathfrak{S} \subset \mathcal{H}$ hat eine kleinste obere Schranke $\mathcal{F}' \in \mathcal{H}$, nämlich $\mathcal{F}' := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{S}} \mathcal{F} \in \mathcal{H}$. Dass \mathcal{F}' die Filtereigenschaften erfüllt, sieht man leicht. Mit dem Lemma von Zorn (oder dem Auswahlaxiom) gilt, dass \mathcal{H} ein maximales Element hat. Es gibt also einen Filter \mathcal{F} , zu dem keine echte Erweiterung nach der in Fußnote 9 beschriebenen Methode möglich ist. Für alle Teilmengen $T \subset \mathbb{N}$ ist daher $T \notin \mathcal{F} \wedge \bar{T} \notin \mathcal{F}$ ausgeschlossen. Folglich gilt: $T \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{T} \in \mathcal{F}$.

Der neu gebildete Zahlentyp ist jetzt strukturell zufriedenstellend, da der Rechenkörper ${}^*\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$ keine „problematische Zahlen“ mehr hat, also nullteilerfrei¹¹ und durch \leq vollständig geordnet ist.

Zum praktischen Umgang mit hyperrationalen Zahlen kommen wir später; wir haben auch keine konkrete Kenntnis des Systems \mathcal{F} der relevanten Indexmengen, da es wie schon \mathcal{F}_1 willkürbehaftet ist. Zur Information führen wir nur die entscheidenden Grundeigenschaften von \mathcal{F} an:

- endliche Indexmengen sind irrelevant (wie bei \mathcal{F}_0).
- Obermengen relevanter Indexmengen sind (erst recht) relevante Indexmengen (wie bei \mathcal{F}_0).
- der Durchschnitt zweier relevanter Mengen ist immer noch eine relevante Menge (wie bei \mathcal{F}_0).
- Für beliebige Indexmengen T gilt: $T \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{T} \in \mathcal{F}$ (Nur diese Eigenschaft ist neu).¹²

Schreibweise: Ist p ein einstelliges Prädikat, so schreiben wir $\tilde{\forall}p(n)$ anstelle von $\{n \mid p(n)\} \in \mathcal{F}$.¹³

vii. In ${}^*\mathbb{Q}$ unterscheiden wir verschiedene Arten von Zahlen:

- $\Gamma \in {}^*\mathbb{Q}$ ist eine *infinite* Zahl $:\Leftrightarrow \forall n (|\Gamma| > n)$. Beispiele: $\Omega = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$ und $-(2^n)$.
- $\alpha \in {}^*\mathbb{Q}$ ist eine *finite* Zahl $:\Leftrightarrow \exists n (|\alpha| \leq n)$. Und ${}^*\mathbb{Q}_{finit} := \{\alpha \in {}^*\mathbb{Q} \mid \exists n (|\alpha| < n)\}$.
- $\delta \in {}^*\mathbb{Q}$ ist eine *Infinitesimalzahl* $:\Leftrightarrow \forall k (|\delta| < \frac{1}{k})$. Und $\mathfrak{S} := \{\delta \in {}^*\mathbb{Q} \mid \forall k (|\delta| < \frac{1}{k})\}$.

Offenbar gilt $\mathfrak{S} \subset {}^*\mathbb{Q}_{finit}$, und $\delta \in \mathfrak{S}$ ist entweder null oder der Kehrwert einer infiniten Zahl.

(*) Ist $\alpha = \langle a_n \rangle$ finit, so gilt $\forall k \tilde{\forall}n (|a_n - \alpha| < \frac{1}{k})$, also liegt \mathbb{Q} dicht in ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$.¹⁴

Die Konstruktion von ${}^*\mathbb{Q}$ ist hiermit abgeschlossen.

Anschauliche Deutung von ${}^*\mathbb{Q}$

Alle Rationalzahlen liegen in ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$, und \mathbb{Q} kann bekanntlich auf eine Gerade g mittels Lineal und Zirkel maßstabsgetreu (theoretisch exakt) projiziert werden. Das Beispiel aus i. zeigt aber, dass es für die übrigen finiten Elemente kein allgemeines Verfahren gibt, um von $\alpha \in {}^*\mathbb{Q}_{finit}$ aus zu einem Punkt A auf g zu gelangen. Denken wir uns dennoch gemäß der \leq Ordnung und der Aussage (*) eine maßstabsgetreue Erweiterung der Zuordnung auf alle finiten hyperrationalen Zahlen, so werden speziell die Infinitesimalzahlen auf unendlich viele Punkte um den Nullpunkt von g abgebildet, ohne dass man sie „optisch“ von ihm unterscheiden kann¹⁵.

Die \mathfrak{S} -Punkte überdecken also auf einer skalierten Geraden eine (offene) infinitesimale Strecke.

Fordern wir nun, dass optisch ununterscheidbare Punkte nur einer Zahl entsprechen, dann müssen wir \mathfrak{S} zu einer Äquivalenzklasse zusammenfassen. Das führt zur Konstruktion von \mathbb{R} mittels einer *Reduktion der Vielfalt* von ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$.

${}^*\mathbb{Q} \rightarrow \mathfrak{R}$: Die Konstruktion der reellen Zahlen \mathfrak{R} aus ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$

¹¹ Gilt $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = 0$, aber nicht $\langle a_n \rangle = 0$, so folgt $T := \{n \mid a_n = 0\} \notin \mathcal{F}$, also $\bar{T} = \{n \mid a_n \neq 0\} \in \mathcal{F}$. Mit III_{FE} erhält man $\{n \mid a_n \cdot b_n = 0 \wedge a_n \neq 0\} \in \mathcal{F}$, mit II_{FE} also $\{n \mid b_n = 0\} \in \mathcal{F}$. Das heißt $\langle b_n \rangle = 0$.

¹² Wegen $T \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{T} \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0$ müssen die Filtereigenschaften I_{FE} und IV_{FE} hier nicht erwähnt werden.

¹³ Damit gilt zum Beispiel $\tilde{\forall}p(n) \Leftrightarrow \tilde{\forall}(\neg p(n))$ und $\tilde{\forall}(p_1(n) \wedge p_2(n)) \Leftrightarrow \tilde{\forall}(p_1(n)) \wedge \tilde{\forall}(p_2(n))$.

¹⁴ Da $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\alpha + \frac{z}{k}, \alpha + \frac{z+1}{k} \right) \cap \mathbb{Q} = {}^*\mathbb{Q}_{finit} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{q} \in \left[\alpha + \frac{z}{k}, \alpha + \frac{z+1}{k} \right) \cap \mathbb{Q}$. Es folgt $q := \tilde{q} - \frac{z}{k} \in \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{k} \right) \cap \mathbb{Q}$, also $|q - \alpha| < \frac{1}{k}$. Aus $|a_n - \alpha| \leq |a_n - q| + |q - \alpha| < |a_n - q| + \frac{1}{k}$ und $|q - \alpha| < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \tilde{\forall}n \left(|a_n - q| + \frac{1}{k} < \frac{2}{k} \right)$ folgt mit II_{FE} nun $\forall k \tilde{\forall}n (|a_n - \alpha| < \frac{2}{k})$ und damit die Behauptung.

¹⁵ Siehe aber die „Unendlichkeitslupe und infinite Vergrößerung“ von Karl Kuhlemann, Kap. 6 in „Über die Elemente der Analysis – Standard und Nonstandard“ Springer Spektrum 2022

Das Verfahren folgt dem gleichen Muster wie vorher in zwei Schritten: 1. Man definiert eine Äquivalenzrelation, die algebraisch konform ist. Und 2. Man überträgt die \leq Ordnung in geeigneter Weise.

1. $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{Q}$ heißen *infinitesimal benachbart*, in Zeichen $\alpha \simeq \beta : \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathfrak{S}$. Damit gilt:

$$\delta \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \delta \simeq 0 \quad \delta, \varepsilon \in \mathfrak{S} \Rightarrow \delta + \varepsilon \in \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \delta \in \mathfrak{S} \wedge \alpha \in {}^*\mathbb{Q}_{finit} \Rightarrow \alpha \cdot \delta \in \mathfrak{S}.$$

Es folgt: $\alpha \simeq \alpha$, $\alpha \simeq \beta \rightarrow \beta \simeq \alpha$ und $\alpha \simeq \beta \simeq \gamma \rightarrow \alpha \simeq \gamma$. Also ist \simeq eine Äquivalenzrelation, und benachbarte Zahlen wie $\langle 0,9; 0,99; 0,999; \dots \rangle$ und $\langle 1,1,1, \dots \rangle = 1$ werden nun gleichgesetzt:

Für alle $\alpha \in {}^*\mathbb{Q}_{finit}$ wird die Äquivalenzklasse $\bar{\alpha} := \{\tilde{\alpha} \in {}^*\mathbb{Q} \mid \tilde{\alpha} \simeq \alpha\}$ als *Monade* von α bezeichnet oder auch als *reelle Zahl*. Und \mathfrak{R} bezeichne die Gesamtheit der reellen Zahlen.

Offensichtlich¹⁶ sind die Punkt- und Strichrechnung repräsentantenunabhängig von ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$ auf \mathfrak{R} übertragbar, und \mathfrak{R} enthält weder infinite noch infinitesimale Zahlen, da die Menge der Infinitesimalzahlen die 0-Monade ist. Für Dezimalzahlen wie $a = 1,01001000100001$ usw. spielt jetzt die Vielzahl der Möglichkeiten, sie als rationale Folge darzustellen, in \mathfrak{R} keine Rolle mehr. Waren z.B.

$$\alpha = \langle 1,010; 1,01001; 1,0100100; 1,010010001; 1,01001000100; 1,0100100010000; \dots \rangle \text{ und} \\ \tilde{\alpha} = \langle 1; 1,01; 1,01001; 1,010010001; 1,01001000100001; 1,01001000100001000001; \dots \rangle$$

in ${}^*\mathbb{Q}$ noch verschieden, so gehören sie in \mathfrak{R} derselben Monade an, weil für alle $\varepsilon = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Relation $|a_n - \tilde{a}_n| < \varepsilon$ von höchstens endlich vielen Indizes erfüllt wird; es gilt also $\alpha \simeq \tilde{\alpha}$.

2. Die Relation \leq wird von ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$ auf \mathfrak{R} so übertragen, dass $\alpha \leq \beta \rightarrow \bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ und $\bar{\alpha} < \bar{\beta} \rightarrow \alpha < \beta$ gilt:

$$\bar{\alpha} < \bar{\beta} : \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathfrak{S} (\alpha + \delta < \beta) \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad \bar{\alpha} < \bar{\beta} : \Leftrightarrow \exists k (\alpha + \frac{1}{k} \leq \beta).$$

Damit ist $\mathfrak{R}(+, \cdot, \leq)$ ein linear geordneter Körper¹⁷. Und $\mathfrak{R}(+, \cdot, \leq)$ ist eine konservative Erweiterung von $\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$, wobei die Rationalzahlen wieder durch konstante Folgen repräsentiert werden. Aber verschiedene reelle Zahlen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ haben nun einen „sichtbaren“ Abstand $\geq \frac{1}{k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$.

Die Konstruktion der reellen Zahlen ist damit abgeschlossen.

$\mathbb{R} \equiv \mathfrak{R}$: Rechenpraxis, Grenzwerte und die Isomorphie von \mathbb{R} und \mathfrak{R}

Der Zusammenhang zum üblichen Grenzwertbegriff ergibt sich aus einer naheliegenden Frage, wie die Zahlen aus \mathfrak{R} durch möglichst praktisch handhabbare Folgen repräsentiert werden können.

1. Für $\alpha = \langle 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots \rangle$ gilt offenbar $\bar{\alpha} \in \{1, 2, 3\}$. Aber Genauer wissen wir nicht, da wir die Menge \mathcal{F} der relevanten Indexmengen (siehe vi.) nicht konkret kennen. In der Praxis interessieren daher Folgen (a_n) , die einen reellen Zahlenwert unabhängig von \mathcal{F} festlegen.

Solche Folgen heißen *konvergent*; sie müssen beschränkt sein¹⁸, da \mathfrak{R} aus ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$ hervorgeht.

Die durch eine *konvergente* Folge (a_n) bestimmte reelle Zahl a heißt *Grenzwert* von (a_n) .

Und anstelle von $a = \overline{\langle a_n \rangle}$ ist die Schreibweise $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ allgemein üblich.

¹⁶ Zum Beispiel: $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \alpha + \beta + ((\tilde{\alpha} - \alpha) + (\tilde{\beta} - \beta)) \simeq \alpha + \beta + 0$.

¹⁷ Aus den in 1. genannten Rechengesetzen folgt leicht die Repräsentantenunabhängigkeit. Die vollständige Linearität der \leq Ordnung in \mathfrak{R} , also $-\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \Leftrightarrow \bar{\beta} < \bar{\alpha}$, resultiert direkt aus der in ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$. Zur Antisymmetrie: $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha} \Rightarrow \exists \varepsilon, \delta \in \mathfrak{S} (\varepsilon \leq \beta - \alpha \leq \delta) \Rightarrow \alpha \simeq \beta \Rightarrow \bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Zur Transitivität: $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \leq \bar{\gamma} \Rightarrow \exists \varepsilon, \delta \in \mathfrak{S}$ mit $(\alpha + \varepsilon \leq \beta \wedge \beta + \delta \leq \gamma)$, also $(\alpha + (\varepsilon + \delta) \leq \gamma) \Rightarrow \exists \delta \in \mathfrak{S} (\alpha + \delta \leq \gamma)$, also $\bar{\alpha} \leq \bar{\gamma}$.

¹⁸ Andernfalls gäbe es eine Teilfolge (a_{i_n}) von (a_n) mit $\forall n (|a_{i_n}| + 1 \leq |a_{i_{n+1}}|)$. $T := \{i_n \mid n\}$ wäre unendlich, und es gäbe einen Filter \mathcal{F} mit $\{i_n \mid n\} \in \mathcal{F}$. Damit wäre $\langle a_n \rangle$ infinit und würde keine reelle Zahl repräsentieren.

Es gibt mehrere Kriterien, um die Filter-Unabhängigkeit, im üblichen Sprachgebrauch also die Konvergenz beschränkter Folgen (a_n) festzustellen:

- (1) $\overline{\langle a_n \rangle}$ ist nicht von \mathcal{F} abhängig. ($\forall k \forall q \in \mathbb{Q}$ gilt $|\overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}} - q| < \frac{1}{k} \Leftrightarrow |\overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}'} - q| < \frac{1}{k}$).
- (2) Jede unendliche Teilfolge (a_{i_n}) von (a_n) repräsentiert stets dieselbe Zahl in \mathfrak{R} .
- (3) $\forall k \exists n \forall i, j \geq n (|a_i - a_j| < \frac{1}{k})$ oder kürzer: $\forall k \exists n \forall i (|a_i - a_n| < \frac{1}{k})$.

Das zuletzt genannte *Cauchy-Kriterium* ist bekanntlich die Grundlage der auf G. Cantor zurückgehenden Konstruktion der reellen Zahlen. Zur Äquivalenz der drei Kriterien siehe Fußnote¹⁹.

Jede monotone und beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge, d.h. erfüllt das Kriterium (3).²⁰
Zu jeder Zahl $\bar{\alpha} \in \mathfrak{R}$ gibt es konvergente Folgen²¹, denn \mathbb{Q} liegt auch dicht in \mathfrak{R} .

II. Erwähnenswert ist, dass der Begriff konvergenter Folgen auf reellwertige Folgen ausgedehnt werden kann. Das ist schon aufgrund der Tatsache plausibel, dass \mathbb{Q} in ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$ dicht liegt:

Erfüllt eine Folge (\bar{a}_n) das Cauchy-Kriterium $\forall k \exists n \forall i (|\bar{a}_i - \bar{a}_n| < \frac{1}{k})$, so existiert eine reelle Zahl $\bar{\alpha}$, sodass $\forall k \exists n \forall i (|\bar{a}_i - \bar{\alpha}| < \frac{1}{k})$.²²

Und reelle Folgen sind auch nur dann konvergent, wenn sie das Cauchy-Kriterium erfüllen.²³

Bekanntlich gibt es bis auf Isomorphie nur einen linear geordneten, archimedischen und topologisch vollständigen Körper. Mit der Fußnote 22 ist also die Isomorphie von $\mathfrak{R}(+, \cdot, \leq)$ und $\mathbb{R}(+, \cdot, \leq)$ bewiesen.

¹⁹ (1) \Rightarrow (2): Sei (2) nicht erfüllt. Für ein $\alpha = \langle a_n \rangle$ und $\beta = \langle a_n \rangle$ mit injektiver Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gelte $|\alpha - \beta| \geq \frac{1}{k}$. Mit (*) folgt $T := \{n \mid |a_n - \alpha| < \frac{1}{4k}\} \in \mathcal{F}$, und es existiert ein $q \in T' := \{i_n \mid |a_{i_n} - \beta| < \frac{1}{5k}\} \notin \mathcal{F}$. Folglich gilt $|\alpha - q| \geq |\alpha - \beta| - |\beta - q| > \frac{4}{5k}$, also $|\overline{\langle a_m \rangle}^{\mathcal{F}} - q| > \frac{3}{5k}$. Da T' unendlich ist, existiert ein Filter \mathcal{F}' mit $T' \in \mathcal{F}'$, sodass $\forall m \in T' (|a_m - q| \leq |a_m - \beta| + |\beta - q| < \frac{2}{5k})$ und $|\overline{\langle a_m \rangle}^{\mathcal{F}'} - q| < \frac{3}{5k}$. Folglich gilt nicht (1).

(2) \Rightarrow (3): Ist (3) nicht erfüllt, so gibt es ein k und eine injektive Abbildung $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $\forall n (|a_{i_n} - a_n| \geq \frac{1}{k})$. Folglich gilt dann $|\langle a_{i_n} \rangle - \langle a_n \rangle| \geq \frac{1}{k}$ im Widerspruch zu dem Kriterium (2).

(3) \Rightarrow (1): Gilt (1) nicht, so gibt es zwei Filter $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ mit $|\overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}} - q| < \frac{1}{k} \wedge |\overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}'} - q| \geq \frac{1}{k}$. Der Abstand von $\overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}}$ zu $q \pm \frac{1}{k}$ ist nicht infinitesimal, also gilt $|q - \overline{\langle a_n \rangle}^{\mathcal{F}}| \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k'}$ mit $k' \geq k$. Gemäß (*) gibt es für $\alpha^{\mathcal{F}} := \langle a_n \rangle^{\mathcal{F}}$ und $\alpha^{\mathcal{F}'} := \langle a_n \rangle^{\mathcal{F}'}$ Teilfolgen (a_{i_n}) bzw. (a_{j_n}) , sodass $\forall n (|a_{i_n} - \alpha^{\mathcal{F}}| < \frac{1}{4k'})$ und $\forall m (|a_{j_m} - \alpha^{\mathcal{F}'}| < \frac{1}{4k'})$. Damit folgt nun $\forall n \forall m (|a_{i_n} - a_{j_m}| \geq |q - a_{j_m}| - |q - a_{i_n}| > (\frac{1}{k} - \frac{1}{4k'}) - (\frac{1}{k} - \frac{1}{4k'}) > \frac{1}{k'} - \frac{2}{4k'} = \frac{1}{2k'})$ im Widerspruch zu (3).

²⁰ Gilt $\overline{\langle a_n \rangle} < \bar{\beta}$ mit $\alpha = \langle a_n \rangle$, so gibt es ein k , sodass $\alpha + \frac{1}{k} \leq \bar{\beta}$, und mit (*) folgt $\forall n (a_n < \bar{\beta})$. Entsprechend gilt $\overline{\langle a_n \rangle} > \bar{\beta} \Rightarrow \forall n (a_n > \bar{\beta})$. Sei (a_n) z.B. monoton steigend und beschränkt und (a_{i_n}) eine unendliche Teilfolge. Dann gilt $\forall m (a_{i_n} \leq a_m)$, d.h. $(a_{i_n} \leq \langle a_m \rangle)$, also $\forall n (a_{i_n} \leq \langle a_m \rangle)$. $\neg \forall n (a_{i_n} > \langle a_m \rangle) \Rightarrow \neg (\overline{\langle a_{i_n} \rangle} > \overline{\langle a_m \rangle})$ ergibt $\overline{\langle a_{i_n} \rangle} \leq \overline{\langle a_m \rangle}$. Da auch $\forall m (a_n \leq a_{i_m})$, gilt analog $\overline{\langle a_n \rangle} \leq \overline{\langle a_{i_n} \rangle}$, also $\overline{\langle a_{i_n} \rangle} = \overline{\langle a_n \rangle}$. Damit erfüllt (a_n) Kriterium (2).

²¹ Sei $\alpha = \langle a_n \rangle$ finit. Nach (*), siehe vii., gibt es eine Folge (\tilde{a}_n) mit $\forall n (|\tilde{a}_n - \alpha| < \frac{1}{n})$. Also ist (\tilde{a}_n) eine Cauchy-Folge. Nach (*) existiert für $\tilde{\alpha} := \langle \tilde{a}_n \rangle$ eine Teilfolge (\tilde{a}_{i_n}) mit $i_n \geq n$, sodass $|\alpha - \tilde{a}_{i_n}| < \frac{1}{n}$ und $\forall n (|\tilde{a}_{i_n} - \tilde{\alpha}| < \frac{1}{n})$. Nun folgt $\forall n (|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq |\alpha - \tilde{a}_{i_n}| + |\tilde{a}_{i_n} - \tilde{\alpha}| < \frac{2}{n})$, also $\alpha \approx \tilde{\alpha}$.

²² Mit (*) kann jedes Folgeglied $\bar{\alpha}_i \in \mathfrak{R}$ durch $(a_{i,k})$ repräsentiert werden, sodass $\forall k (|a_{i,k} - \alpha_i| < \frac{1}{k})$ gilt. $\forall k \exists n \forall i \geq n (|\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_n| < \frac{1}{k})$ impliziert $\forall k \exists n \forall i \geq n (|a_i - a_n| < \frac{1}{k})$. Es folgt $\forall k \exists n \geq k \forall i \geq n (|a_{i,i} - a_{n,n}| \leq |a_{i,i} - \alpha_i| + |\alpha_i - a_n| + |a_n - a_{n,n}| < \frac{1}{i} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{k})$. Also definiert $a_n := a_{n,n}$ eine Cauchy-Folge, und $\alpha := \langle a_n \rangle$ ist finit. Es gilt $\forall k \exists n \geq k \forall i, j \geq n (|a_{i,j} - a_{j,j}| \leq |a_{i,j} - \alpha_i| + |\alpha_i - \alpha_j| + |\alpha_j - a_{j,j}| < \frac{1}{j} + \frac{3}{k} + \frac{1}{j} \leq \frac{5}{k})$. Also gilt $\forall k \exists n \forall i \geq n (|\alpha_i - \alpha| < \frac{5}{k})$ und daher $\forall k \exists n \forall i \geq n (|\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}| < \frac{6}{k})$. \square

²³ Ist (\bar{a}_n) keine Cauchy-Folge, so gibt es ein k , sodass $\forall n \exists i_n > n (|\bar{a}_{i_n} - \bar{a}_n| \geq \frac{1}{k})$. Für beliebige $\bar{\alpha} \in \mathfrak{R}$ folgt $|\bar{a}_{i_n} - \bar{\alpha}| < \frac{1}{2k} \Rightarrow |\bar{a}_n - \bar{\alpha}| \geq \frac{1}{2k}$. Also kann $\forall i (|\bar{a}_i - \bar{\alpha}| < \frac{1}{2k})$ von keinem $\bar{\alpha} \in \mathfrak{R}$ erfüllt werden.

Damit ist der Konstruktionsweg $\mathbb{Q} \rightarrow {}^*\mathbb{Q} \supset {}^*\mathbb{Q}_{finit} \rightarrow \mathfrak{R} \equiv \mathbb{R}$ abgeschlossen und der Zusammenhang mit der üblichen Einführung von \mathbb{R} und dem Konvergenzkriterium reeller Zahlenfolgen geklärt.

Zur Einschätzung des Anforderungsprofils und abschließende Bemerkungen

Um leichter die Herausforderungen einer propädeutischen Darstellung der ausgeführten Überlegungen zu überblicken, seien die wesentliche Schritte hier nochmal knapp zusammenfassend aufgeführt:

- Zunächst stützt man sich nur auf die kanonische algebraische Struktur der rationalen Folgen \mathbb{Q}^∞ .
- Diese wird simpel auf Äquivalenzklassen solcher Folgen übertragen. Die Klassen entstehen anhand des Quantors $\tilde{\forall}$ „fast alle“, der drei leicht einleuchtende Grundeigenschaften hat (siehe Fußnote 6 und Unterpunkt vi.).
- Man modifiziert $\tilde{\forall}$ „für fast alle“ und erhält $\tilde{\forall}$ „für genügend viele“ durch die zusätzliche Eigenschaft $\neg \tilde{\forall} p(n) \Rightarrow \tilde{\forall} (\neg p(n))$ und erarbeitet sich damit eine *theoretische* Rechtfertigung für die Existenz eines linear geordneten Rechenkörpers ${}^*\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$ als konservative Erweiterung von $\mathbb{Q}(+, \cdot, \leq)$.

Dieser Schritt ist insgesamt anspruchsvoll. Aber ein konkretes Rechnen steht dabei ebenso wenig zur Debatte, wie das Rechnen mit Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen beim üblichen Umgang mit reellen Zahlen. Es geht, wie häufig in der Mathematik, nur um den ggf. anfänglichen Einblick in ein theoretisches Konzept, welches nicht durch eine gewohnte Anschauung schon gegeben ist.

- Nun untersucht man die elementaren Rechengesetze zu den infiniten Zahlen $\mathfrak{S} \subset {}^*\mathbb{Q}$. Dies liefert die praktischen Grundlagen für spätere Themen wie Stetigkeit²⁴, Differential- und Integralrechnung. Man bildet Vorstellungen zur Zahlengeraden und findet „Gewohntes“ wie „ \mathbb{Q} liegt dicht“ auch in ${}^*\mathbb{Q}_{finit}$. Die Motivation zur Bildung eines reduzierten Zahlentyps ist dann naheliegend.
- Die Konstruktion $\mathfrak{R} = {}^*\mathbb{Q}_{finit}/\simeq$ geschieht nach dem inzwischen bekannten Muster anhand von Äquivalenzklassen. Die algebraischen Struktur und die \leq Ordnung wird dabei kanonisch vererbt.
- Alle reellen Zahlen sind durch Cauchy-Folgen – damit auch Filter-unabhängig – repräsentierbar. Die repräsentierte Zahl ist der sogenannte *Grenzwert* der *konvergenten* Folge.
- Auch reelle Zahlenfolgen haben einen Grenzwert, wenn sie dem Cauchy-Kriterium genügen.

Die beiden letzten Punkte dienen der theoretischen Rechtfertigung des gewohnt einfachen Umgangs mit reellen Zahlen. Sie treten im schulischen Zusammenhang nur in Form einer plausiblen Erwähnung auf. Denn die Beweise, die auch bei üblicheren Konstruktionen der reellen Zahlen und dem Nachweis der topologischen Vollständigkeit notwendig sind, haben einen weitgehend technischen Charakter ebenso wie die hier in den Fußnoten ausgeführten Beweise. Sie spielen für die übliche Rechenpraxis keine Rolle, obwohl sie diese überhaupt erst rechtfertigen.

Welche anschauliche Deutung ergibt sich aus dem hier dargestellten Aufbau? Jede reelle Zahl ist eine Monade von überabzählbar vielen hyperrationalen Zahlen und erscheint daher auf einer skalierten Geraden als optische Zusammenfassung unendlich vieler Punkte einer offenen infinitesimalen Strecke. Eine Gerade kann als geometrisches Projektionsobjekt sowohl rationaler, als auch reeller oder auch hyperrationaler Zahlen aufgefasst werden, aber *sie ist* nicht eine dieser Mengen. Eine „natürliche“ Fixierung gibt es hier nicht und steht auch einem beweglichen Umgang mit Geometrie entgegen. Die gewohnheitsmäßige Gleichsetzung: „die Gerade *besteht aus* einer Menge «reellwertiger» Punkte“ unterschlägt die theoretische und damit auch willkürliche Konstruktion von \mathbb{R} . Auf keinen Fall sollte

²⁴ Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x , wenn $f(x + \delta) \simeq f(x)$ für alle $\delta \in \mathfrak{S}$.

aber einem theoretischen Instrumentarium der Nimbus eines naturgegebenen Sachverhaltes umgehängt werden. Und der Standpunkt, eine Fixierung sei doch stets unproblematisch, da jede Theorie ohnehin immer nur Modell von Wirklichkeit sei, sollte erst recht darauf abzielen, theoretische Gewohnheiten – zu denen übrigens auch dieser Standpunkt zählt – nicht zur unbewussten, stets unhinterfragten Routine werden zu lassen. Denn unser Handeln *schafft* Wirklichkeiten, auch wenn sie von unterschwelligem Voraussetzungen bestimmt sind.