Inhaltsverzeichnis

Zur Axiomatisierung der Analysis

Karl Kuhlemann

1 Einleitung

Die reellen Zahlen sind dem ausgebildeten Mathematiker sehr vertraut, denn sie gehören zu den ersten mathematischen Objekten, mit denen er in seiner Ausbildung (gleich zu Beginn der Analysis 1-Vorlesung) in Berührung gekommen ist. Zum später erworbenen Standardwissen gehört, dass alle vollständigen archimedisch angeordneten Körper isomorph sind, dass also die Menge $\mathbb{R}$ durch die Axiome der reellen Zahlen *im Wesentlichen* eindeutig bestimmt ist.[1] Überraschungen, die Struktur von $\mathbb{R}$ betreffend, wie etwa die Existenz infiniter (also unendlich großer) und infinitesimaler (also unendlich kleiner) Zahlen in $\mathbb{R}$, erscheinen daher ausgeschlossen.

In diesem Aufsatz lade ich den Leser ein, sich davon zu überzeugen, dass eine solche Schlussfolgerung vorschnell wäre. Zwar scheint die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ der Existenz infiniter und infinitesimaler Zahlen zu widersprechen, denn zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl, aber dieses Gegenargument zöge nur dann, wenn die Existenz infiniter natürlicher Zahlen ausgeschlossen wäre, und das ist nicht der Fall. Man kann in der Analysis *nicht* beweisen, dass es infinite natürliche Zahlen (und damit infinite und infinitesimale reelle Zahlen) *nicht* gibt.

Im Gegenteil: Man kann die Existenz solcher *Nichtstandard-Zahlen* sichtbar machen, indem man ein neues Prädikat s (für „standard“) in die Sprache der Analysis aufnimmt, und neue Axiome postuliert, die den Umgang mit s regeln. Das sind die zusätzlichen mengentheoretischen Axiomenschemata I, S und T, um die Edward Nelson in seiner *Internen Mengenlehre* (engl. *Internal Set Theory*, abgekürzt mit IST) die übliche Mengenlehre ZFC ergänzt hat.[2]

Nichtstandard-Zahlen sind also im Lichte dieser Betrachtung nichts anderes als besondere reelle Zahlen, deren Existenz der Standard-Analysis nur verborgen bleibt.

1. Der Körper-Isomorphismus zwischen zwei solchen Körpern ist eindeutig bestimmt und erhält die Anordnung und die Limesbildung. Siehe z. B. Ebbinghaus u. a. 1992, S. 42.

2. Nelsons IST ist nicht die einzige Möglichkeit, ZFC zu erweitern, um Nichtstandard-Objekte zu erhalten. Einen umfassenden Überblick über die verschiedenen axiomatischen Zugänge zur Nichtstandard-Analysis geben Kanovei und Reeken 2004.

Um das zu sehen, muss man aufmerksam und genau auf die Axiomatik der reellen Zahlen schauen – aufmerksamer, als dies gewöhnlich in der Praxis und Lehre geschieht. Man muss konsequent Sprachebenen unterscheiden: die Metasprache, in der über Terme und Ausdrücke der Analysis gesprochen wird, von der Objektsprache, in der über reelle Zahlen und Mengen gesprochen wird. Und man muss (entgegen der üblichen Praxis) die benötigten Mengenaxiome in die Analysis einbeziehen.

Im vorliegenden Aufsatz wird es also zunächst um eine kritische und systematische Analyse der Axiomatisierung der reellen Zahlen in ihrer Bezugnahme auf Metasprache und Mengenlehre gehen. Die erfolgreiche Anwendbarkeit der Standard-Analysis gemäß der gegenwärtigen Praxis bleibt hiervon unberührt. Die Analyse führt aber in natürlicher Weise zu einer „bewussteren" Sicht auf die reellen (und die natürlichen) Zahlen. Die damit verbundene (optionale) Bereicherung der Analysis um Nichtstandard-Elemente lässt die systematische Analyse auch unter didaktischen Aspekten interessant erscheinen.

Abschnitt 2 gilt der Analyse der reellen Axiomatik und Abschnitt 3 dann der Begründung der Nichtstandard-Zahlen (und weiterer Nichtstandard-Objekte). In Abschnitt 4 gehe ich auf mögliche systematische und didaktische Konsequenzen ein.

2 Der Standardweg und seine Problematik

2.1 Metasprache und Objektsprache

Nach meinen Recherchen werden die reellen Zahlen in den universitären Anfängervorlesungen zur Analysis zumeist axiomatisch eingeführt, wobei die Axiome in aller Regel nicht formal, sondern umgangssprachlich und Mengenaxiome überhaupt nicht angegeben werden. Dies birgt die Gefahren, dass die Grenze zwischen Metasprache und Objektsprache verwischt und dass implizit verwendete, aber unausgesprochene Axiome der Mengenlehre intransparent bleiben.

Selbst wenn man die Formalisierung der Mathematik anfangs nicht zu sehr hervorkehren möchte, ist es wichtig zu vermitteln, dass das Sprechen über Terme, Ausdrücke und Axiome auf einer anderen Ebene stattfindet als das Sprechen über reelle Zahlen, Mengen und Funktionen und dass die metasprachlichen natürlichen Zahlen, die man „naiv" verwendet, um die Länge von Termen oder die Anzahl der freien Variablen eines Ausdrucks anzugeben, etwas anderes sind als die objektsprachlichen natürlichen Zahlen, die man innerhalb der axiomatisch eingeführten reellen Zahlen definiert. Besonders klar wird der Unterschied, wenn man sich in der Metasprache mit dem potentiell Unendlichen begnügt und die Bildung aktual unendlicher Mengen (zum Beispiel die Menge aller Terme) unterlässt, was ohne weiteres möglich ist, solange man keine Modelltheorie betreiben will. Verwendet man in der Metasprache das aktual Unendliche, so befindet man sich im „Meta-Universum“ der Hintergrundmengenlehre, die ihrerseits wieder einer axiomatischen Grundlegung bedarf. Die metasprachlichen natürlichen Zahlen sind dann genau genommen nicht mehr *naiv*, denn das aktual Unendliche kann naiv nicht erschlossen werden, man muss es *vereinbaren*, sprich: Man braucht Axiome. Damit erscheint eine weitere Meta-Ebene hinter der Sprache der Hintergrundmengenlehre.

Für die hier angestellten Überlegungen ist es ausreichend, zwei Sprachebenen zu unterscheiden: die Objektsprache (in der über das Universum der Analysis, also über Mengen und reelle Zahlen gesprochen wird) einerseits und die Metasprache (in der über die Objektsprache und – sofern für modelltheoretische Betrachtungen erforderlich – über das Meta-Universum der Hintergrundmengenlehre gesprochen wird) andererseits.

In jedem Fall müssen die natürlichen Zahlen und damit auch der Endlichkeitsbegriff der unterschiedlichen Sprachebenen sauber auseinandergehalten werden. Um diese wesentliche Unterscheidung optisch hervorzuheben, verwende ich für metasprachliche natürliche Zahlen und Variablen den Frakturzeichensatz (zum Beispiel $\mathfrak{0}, \mathfrak{1}, \mathfrak{2}, \mathfrak{3}, \ldots, \mathfrak{n}$) und für objektsprachliche natürliche Zahlen und Variablen den normalen Zeichensatz (zum Beispiel $0, 1, 2, 3, \ldots, n$). Das Symbol $\mathbb{N}$ verwende ich ausschließlich in der Objektsprache für die Menge der objektsprachlichen natürlichen Zahlen.

2.2 Formalisierung

Erfahrungsgemäß wird (schon aus Bequemlichkeit, zur Vermeidung von Schreibarbeit) im Verlauf der Anfängervorlesungen die Objektsprache durch die Verwendung logischer Quantoren und Junktoren mehr oder weniger streng formalisiert, sodass auch optisch eine Abgrenzung zur Metasprache gegeben ist.

Formalisierung dient aber auch dazu, die logische Struktur komplexerer Aussagen deutlicher hervortreten zu lassen, gerade bei Ausdrücken mit verschachtelten Quantoren, wie sie für die ϵ-δ-Definitionen und -Sätze der Analysis typisch sind.

Ein gewisser Grad an Formalisierung wird also dem Anfänger ohnehin zugemutet. Es spricht allerdings nichts dagegen, Umgangssprache und logische Formeln zu kombinieren und letztere dort einzusetzen, wo sie für das Verständnis förderlich sind. Es sollte dann klar sein, dass ein (teilweise) umgangssprachlicher Satz der Objektsprache prinzipiell komplett formalisiert werden könnte.

Beispiel: Viele Sätze beginnen mit Formulierungen wie „Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt …“ Formal ist ein solcher Satz ein Ausdruck der Gestalt $\forall f \forall a \forall b\, (\phi \Rightarrow \psi)$, wobei ϕ formale Ausdrücke enthält für „f ist eine Funktion“, „a und b sind reelle Zahlen“, „der Definitionsbereich von f ist $[a, b]$“, „der Bildbereich von f ist eine Untermenge von $\mathbb{R}$“, „f ist stetig“, die vorher definiert worden sein müssen.

Der wichtigste Grund, die Formalisierung der für die Analysis verwendeten Sprache zu thematisieren, ist jedoch, dafür zu sensibilisieren, dass die Wahl der Sprache darüber entscheidet, welche Aussagen in der Analysis formuliert werden können und welche nicht. So ist es unmöglich, eine Aussage über Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu formulieren, wenn die Objektsprache keine Symbole für Mengen-Prädikate („ist eine Menge“, „ist Element von“) hat. Auch ein Rückgriff auf metasprachliche Begriffe (z. B. „ist eine (metasprachliche) natürliche Zahl“ oder „alle Terme der Form $1 + \cdots + 1$“) ist in der Objektsprache nicht möglich. Sprachen der Prädikatenlogik erster Stufe (die in der Regel verwendet werden) erlauben unbeschränkte Quantifizierungen über das gesamte postulierte „Universum“ der Analysis („Für alle x gilt ...“ oder „Es gibt ein x, für das ... gilt“), nicht jedoch über Prädikate (z. B. „Für alle Prädikate gilt ...“).

2.3 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind – arithmetisch – nicht in einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe charakterisierbar.[3] Axiomatisierungen auf der ersten Stufe[4] lassen immer auch Nichtstandardmodelle zu und sind weniger für die Analysis selbst als für die Modelltheorie von Interesse.

Üblich und für die Praxis tauglicher sind mengentheoretische Axiomatisierungen, wie sie zuerst von Hilbert (Hilbert 1900) und Tarski (Tarski 1937) angegeben worden sind. Sie finden sich daher in fast allen Lehrbüchern zur Analysis. Im Grunde handelt es sich dabei um Erweiterungen einer axiomatischen Mengenlehre, wobei die Axiome der Mengenlehre in den Lehrbüchern in der Regel nicht explizit genannt werden. Wenig Beachtung findet die Tatsache, dass auch die mengentheoretischen Axiomensysteme der reellen Zahlen (inklusive der Mengenaxiome) stets verschiedene Modelle haben.

Das weit verbreitete Lehrbuch von Otto Forster beginnt (nach einem einleitenden Paragraphen zur vollständigen Induktion) in §2 mit den Worten

> Wir setzen in diesem Buch die reellen Zahlen als gegeben voraus. Um auf sicherem Boden zu stehen, werden wir in diesem und den folgenden Paragraphen einige Axiome formulieren, aus denen sich alle Eigenschaften und Gesetze der reellen Zahlen ableiten lassen.[5]

3. Siehe zum Beispiel Ebbinghaus, Flum und Thomas 2007
4. Siehe z. B. Bedürftig und Murawski 2015, S. 346
5. Siehe Forster 2015, S. 17.

Anschließend werden zunächst die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome vorgestellt, die noch rein arithmetisch (also ohne Mengenvokabular) formulierbar sind. Beim archimedischen Axiom und bei den Definitionen von reellen Zahlenfolgen, Konvergenz und Vollständigkeit (mittels Cauchy-Folgen) tritt dann die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in Erscheinung, und da wird die Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache relevant, denn die naheliegende „Definition" von $\mathbb{N}$ als Menge aller Einsensummen $1+\cdots+1$ ist in der Objektsprache nicht möglich, da sie einen Rückgriff auf metasprachliche Begriffe beinhaltet. Andererseits darf das Symbol $\mathbb{N}$ erst dann zur Formulierung von Axiomen, Definitionen und Sätzen der Analysis benutzt werden, *wenn* es in der Objektsprache definiert worden ist.[6]

Ein korrekter Weg, um die Menge der (objektsprachlichen) natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder analog als Teilmenge eines beliebigen angeordneten Körpers K) zu gewinnen, ist folgender:[7]

1. Man nenne eine Menge M induktiv, wenn $1 \in M$ ist und wenn mit jedem $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ ist.[8]

2. Man definiere $\mathbb{N}$ als den Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die Definition ist möglich, da es induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$ gibt (zum Beispiel $\mathbb{R}$ selbst) und da der Durchschnitt induktiver Mengen wieder induktiv ist. Voraussetzung sind Mengenaxiome, die diese Schlüsse zulassen (hier insbesondere das Potenzmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome).

$\mathbb{N}$ ist nach Definition die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge, das heißt für jede induktive Menge M gilt $\mathbb{N} \subseteq M$. Eine unmittelbare Folgerung ist der Satz der vollständigen Induktion: Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist mit $\mathbb{N}$ identisch. Daraus ergibt sich als wichtige Konsequenz die *Wohlordnung* von $\mathbb{N}$: Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält ein minimales Element.

Auch Forster definiert die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie vorübergehend mit $\mathcal{N}$. Dass diese Menge die 'richtigen' (Zitat Forster) natürlichen Zahlen enthält (und die Bezeichnung $\mathbb{N}$ damit gerechtfertigt ist), begründet er damit, dass sie die (mengentheoretisch formulierten) Peano-Axiome erfüllt, welche die natürlichen Zahlen charakterisieren (nach dem Satz von Dedekind sind zwei Peano-Strukturen isomorph). Zuvor schreibt er:

6. Wenn man $\mathbb{N}$ als eigenes Konstantensymbol in die ursprüngliche Symbolmenge aufnähme (oder alternativ ein einstelliges Relationssymbol für das Prädikat „ist eine natürliche Zahl"), liefe es auf das Gleiche hinaus, denn man müsste das Axiomensystem dann um entsprechende definierende Axiome für die neue Konstante bzw. das neue Prädikat ergänzen.

7. Vgl. z. B. Ebbinghaus u. a. 1992, S. 39.

8. Bei einigen Autoren (z. B. bei Forster oder Ebbinghaus) ist 0 das initiale Element induktiver Mengen, bei den meisten hier zitierten Autoren jedoch 1. Daher schließe ich mich dieser Konvention an.

> $\mathcal{N}$ besteht also genau aus den Zahlen, die sich aus der 0 durch sukzessive Addition von 1 erhalten lassen.[9]

Wie oben angemerkt, ist eine solche Formulierung insofern problematisch, als sie die Sprachebenen vermischt. Durch sukzessive Addition von 1 erhält man zwar zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl (die angibt, wie oft man 1 addiert hat) eine objektsprachliche natürliche Zahl. Es ist aber in der Objektsprache nicht möglich, die Menge genau dieser Zahlen zu bilden. Daher ist nicht auszuschließen, dass die Menge $\mathbb{N}$ (metasprachlich) *unerreichbare* Zahlen enthält, also Zahlen, die nicht durch Terme der Form $1 + \cdots + 1$ erreicht werden. Eine genauere Analyse dieses Problems folgt in Abschnitt 2.7. Auch die Peano-Axiome verhindern nicht, dass es in $\mathbb{N}$ (und nach dem Satz von Dedekind damit in jeder Peano-Struktur) unerreichbare Zahlen geben kann (siehe Abschnitt 2.8).

Hat man die Menge $\mathbb{N}$, wie oben beschrieben, in der Objektsprache zur Verfügung, kann man das archimedische Axiom wie bei Forster formulieren.[10] Ebenso kann man Folgen, Cauchy-Folgen und die Konvergenz von Folgen definieren und das Vollständigkeitsaxiom wie bei Forster formulieren („Jede Cauchy-Folge konvergiert“).

Statt des archimedischen und des mittels Cauchy-Folgen formulierten Vollständigkeitsaxioms wird in anderen Lehrbüchern das Supremumsaxiom (z. B. in Deitmar 2014, Grieser 2014) oder das Dedekind’sche-Schnitt-Axiom (z. B. in Behrends 2015, Heuser 2009) verwendet. Die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ und die Konvergenz aller Cauchy-Folgen sind dann Folgerungen. Wird die Vollständigkeit über das Intervallschachtelungs-Axiom definiert (wie z. B. in Königsberger 2004), wird wieder zusätzlich das archimedische Axiom gebraucht. Bei jeder dieser Varianten der Axiomatisierung ist $\mathbb{N}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu definieren. Nicht alle Autoren machen sich (und ihren Lesern) diese Mühe. In Deitmar 2014 und Königsberger 2004 werden einfach die naiv eingeführten natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) in $\mathbb{R}$ weiterverwendet.

Behrends gibt zunächst eine „unkritische“ (Bezeichnung so bei Behrends) Definition von $\mathbb{N}$ (innerhalb eines angeordneten Körpers K) an:

> Unter den natürlichen Zahlen in K verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Elemente, die sich als endliche Summe von Einsen schreiben lassen, also $1, 1{+}1, 1{+}1{+}1$, usw.; üblicherweise schreibt man $2 := 1{+}1$, $3 := 1 + 1 + 1, \dots$ Wir werden hier das Zeichen $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen in K verwenden.[11]

Anschließend räumt er ein, dass diese Definition nicht zum Weiterarbeiten taugt, weil nicht klar sei, was „endliche Summe“ oder „usw.“ bedeuten soll, und führt den

9. Siehe Forster 2015, S. 28.
10. Das archimedische Axiom ist direkt formulierbar in einer Sprache, die unendliche Ausdrücke zulässt (siehe z. B. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2007, S. 152).
11. Siehe Behrends 2015, S. 37.

Leser zur „kritischen“ (Bezeichnung so bei Behrends) Definition $\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ das System der induktiven Teilmengen von K). Allerdings erliegt er direkt danach der Versuchung, die natürlichen Zahlen mit den Einsensummen gleichzusetzen, wenn er schreibt:

> Es ist plausibel, dass dieses $\mathbb{N}$ gerade die Zahlen 1, $1 + 1$, usw. enthalten muss:
>
> - 1 muss zu $\mathbb{N}$ gehören, da 1 in allen induktiven Mengen liegt, ebenso $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, ...
> - Andere Elemente als 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, ... können nicht in $\mathbb{N}$ liegen. Die 0 z.B. deswegen nicht, weil $\{x \mid x \in K, x > 0\}$ eine induktive Menge ist, die 0 nicht enthält.[12]

Ähnliches findet man bei Heuser (der die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbf{N}$ bezeichnet). $\mathbf{N}$ wird als Schnittmenge aller induktiven Teilmengen des angeordneten Körpers K definiert. Im Kapitel „Folgerungen aus dem Schnittaxiom“ steht dann:

> Wir werden sehen [...], daß die vertraute Vorstellung von der nach oben unbeschränkten Menge $\mathbf{N}$ tatsächlich zutrifft; der Beweis hierfür kann jedoch das Schnittaxiom nicht entbehren, mit anderen Worten: Er kann nicht mit alleiniger Benutzung der Körper- und Ordnungsaxiome erbracht werden (es gibt „nichtarchimedisch“ angeordnete Körper, deren „natürliche Zahlen“ – die n-gliedrigen Summen $1 + 1 + \cdots + 1$, 1 das Einselement des Körpers – alle unter einem festen Körperelement liegen; [...].)[13]

Zwar ist richtig, dass die Menge der natürlichen Zahlen in der Menge der reellen Zahlen nach oben unbeschränkt ist und dass es nichtarchimedisch angeordnete Körper gibt, aber die natürlichen Zahlen dürfen nicht mit den n-gliedrigen Summen $1 + 1 + \cdots + 1$ identifiziert werden, da n hier eine metasprachliche natürliche Zahl ist (entsprechend meiner oben angegebenen Vereinbarung würde ich hier also $\mathfrak{n}$ schreiben).

Ein anderes Beispiel für die Vermischung von Metasprache und Objektsprache ist die Definition der Partialsummen durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und eine gegebene Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

12. Siehe Behrends 2015, S. 38
13. Siehe Heuser 2009, S. 71

Die rechte Seite stellt einen Term der Objektsprache dar, der nur für eine metasprachliche natürliche Zahl n (also eigentlich $\mathfrak{n}$) sinnvoll ist. Dies reicht zur Definition der Partialsummen nicht aus. Korrekt wäre die rekursive Definition

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1},$$

die aufgrund des (zu beweisenden) Rekursionssatzes eindeutig ist. Der Rekursionssatz fußt auf dem Satz der vollständigen Induktion, der wiederum aus der Definition von $\mathbb{N}$ als kleinster induktiver Teilmenge von $\mathbb{R}$ folgt.

Der Rekursionssatz kann für Funktionen (die auf Mengen definiert sind) oder allgemeiner für Operationen (die auf dem gesamten Universum definiert sind) formuliert werden. Die zweite Version setzt das Schema der Ersetzungsaxiome voraus und wird dann gebraucht, wenn Operationen rekursiv definiert werden sollen, zum Beispiel die n-fache Potenzmenge einer Menge A durch $\mathcal{P}^1(A) := \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}^{n+1}(A) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(A))$ für $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Die unterschlagenen Mengenaxiome

Da die übliche Analysis sich der Mengensprache bedient, enthalten viele Analysis-Lehrbücher oder -Vorlesungsskripte eine kurze Einführung in die (naive) Mengenlehre (siehe z. B. Behrends 2015, Deitmar 2014, Grieser 2014, Heuser 2009). Es wird dabei stets darauf geachtet, dass die Mengenlehre nicht als zur Analysis gehörig erscheint. Vielmehr scheint die Mengenlehre einer anderen Ebene anzugehören und ein selbstverständlicher Unterbau zu sein, der mit der axiomatischen Theorie nichts zu tun hat. Behrends vergleicht das Verhältnis von Analysis zur Mengenlehre mit dem Verhältnis dessen, was man in der Fahrschule über das Autofahren lernt, zum Studium von Kraftfahrzeugbau und Verkehrsrecht. Er schreibt:

> So ähnlich verhält es sich mit dem Stellenwert der Mengenlehre innerhalb der Analysis. Es kann hier nicht die Absicht sein, Sie in die Feinheiten des Gebiets einzuführen, dafür ist in späteren Semestern immer noch Zeit. Hier geht es nur um ein *erstes Kennenlernen*, insbesondere brauchen wir einige *Vokabeln*.

In der Tat braucht man für die Analysis nicht die Feinheiten der Mengenlehre (z. B. Ordinalzahltheorie oder fundierte Strukturen), aber wesentliche Grundsätze schon. Es ist schlechterdings unmöglich, axiomatische Analysis mit dem Vokabular der Mengenlehre zu machen, ohne Axiome, die den Umgang mit Mengen regeln. Warum sollte man die Kommutativität der Addition reeller Zahlen axiomatisch fordern müssen, aber die Möglichkeit, Vereinigungs- oder Potenzmengen zu bilden nicht? Man kann Mengenlehre auch nicht auf die Metasprachebene verbannen (als Hintergrundmengenlehre), wenn die Axiome der reellen Zahlen die Mengensprache verwenden. Man braucht die Mengenlehre als *Objektmengenlehre* innerhalb der Analysis.

Es erfordert im Grunde nur wenig Mehraufwand gegenüber der Vermittlung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Mengen, dazu jeweils die axiomatische Grundlage anzugeben. Verzichtet man darauf, sollte man zumindest offen bekennen, dass zum Axiomensystem der Analysis noch Axiome der Mengenlehre gehören, die den naiven Umgang mit Mengen im vorgestellten Rahmen rechtfertigen, die aber aus didaktischen Gründen oder aus Gründen der Zeitersparnis (noch) nicht explizit behandelt werden.

Insgesamt werden für die Analysis die folgenden Axiome der ZFC-Mengenlehre benötigt:[14]

- Extensionalitätsaxiom
- Potenzmengenaxiom
- Axiom der Vereinigung
- Auswahlaxiom
- Schema der Ersetzungsaxiome

Das Paarmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome folgen aus den vorgenannten, werden aber oft in Einführungen in die axiomatische Mengenlehre (zum Beispiel Ebbinghaus 2003) gesondert angegeben, weil diese Axiome historisch betrachtet vor dem Schema der Ersetzungsaxiome formuliert worden sind und man mit ihnen über weite Strecken auch ohne dieses Schema auskommt. Wie oben erwähnt, wird das Schema der Ersetzungsaxiome zum Beispiel gebraucht, um den Rekursionssatz für Operationen zu beweisen.

Ein Existenzaxiom ist überflüssig, wenn die Existenz mindestens einer Menge durch andere Axiome sichergestellt wird, wie in ZFC durch das Unendlichkeitsaxiom. In der mengentheoretischen Axiomatisierung der reellen Zahlen braucht man ein Axiom, das die Existenz einer Menge fordert, die alle reellen Zahlen enthält. Das Unendlichkeitsaxiom ist dann überflüssig, weil man die Menge der natürlichen Zahlen (wie oben beschrieben) durch Aussonderung aus der Menge der reellen Zahlen gewinnt. Das Fundierungsaxiom aus ZFC wird für die Arithmetik der reellen Zahlen nicht gebraucht.

Die in der Analysis benötigten Mengenaxiome sind (in einer umgangssprachlichen Formulierung) auch für einen Anfänger nicht schwer zu verstehen (siehe Abschnitt 2.6). Sie schärfen vielmehr das Bewusstsein für das, was man in der Analysis (und der Mathematik überhaupt) mit Mengen tut. Ihre explizite Nennung unterstreicht ihren Vereinbarungscharakter. Das ist wichtig für ein Verständnis der Grundlagen der Mathematik, denn Mengenaxiome sind keine Selbstverständlichkeiten. Es

14. Siehe Bedürftig und Murawski 2012, S. 314f.

erscheint mir unangemessen, auf der einen Seite die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen und von den Studierenden die korrekte Anwendung der axiomatischen Methode zu erwarten, aber auf der anderen Seite erstens nicht streng zwischen Metasprache und Objektsprache zu unterscheiden und zweitens mit den Mengenaxiomen einen wesentlichen Teil des Axiomensystems unerwähnt zu lassen.

Eine (vielleicht beabsichtigte) Folge dieser Vorgehensweise ist, dass die sogenannte Standardtheorie (ungerechtfertigt) als ganz natürlich erscheint, während ebenso mögliche Nichtstandardtheorien unbeachtet bleiben. Unterscheidet man von Anfang an konsequent zwischen beiden Sprachebenen und bezieht die benötigte Mengenlehre ein, so führt dies in ganz natürlicher Weise zu einer (potentiell) reichhaltigeren Theorie. Es eröffnet die Möglichkeit einer Nichstandard-Analysis innerhalb der reellen Zahlen. Man braucht keine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, keine hyperreellen Zahlen, denn das Infinitesimale und alles, was daraus folgt, schlummert (potentiell) bereits unerkannt in $\mathbb{R}$.

2.5 Endliche Mengen

Die meisten Analysis-Lehrbücher definieren zwar die Begriffe *abzählbar* und *überabzählbar* (und zeigen mit dem Cantor-Argument die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$), würdigen aber den Begriff *endlich* keiner Definition (Behrends ist hier eine Ausnahme). Dabei ist dieser Begriff weniger trivial, als es zunächst den Anschein hat. Auch hier ist es wieder wichtig, sauber zwischen den Sprachebenen zu unterscheiden.

Für die Objektsprache liegt folgende Definition nahe: Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, sodass M und $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ gleichmächtig sind, wobei die Gleichmächtigkeit zwischen zwei Mengen wie üblich über die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen ihnen definiert ist. Die leere Menge ist von dieser Endlichkeitsdefinition eingeschlossen ($n = 0$).

Behrends gibt die gleiche Definition an und weist auch auf die unerwartete Schwierigkeit des Endlichkeitsbegriffs hin:

> Eine Menge M wird *endlich* genannt, wenn sie leer ist oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ (das ist die Abkürzung von $\{m \mid m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\}$) und M gleichmächtig sind, wenn man also die Elemente aus M mit den Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Die Zahl n heißt die *Anzahl der Elemente von M*. Es gelten dann die folgenden Aussagen:
>
> - Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es keine echte Teilmenge von M gibt, die gleichmächtig zu M ist.
> - Teilmengen endlicher Mengen sind wieder endlich.
> - Die Vereinigung von zwei endlichen Mengen ist endlich.

- Die Potenzmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Die *Beweise* sollen hier nicht geführt werden, da wir von diesen Ergebnissen keinen Gebrauch machen werden. (Wenn Sie es selbst versuchen, werden Sie feststellen, dass sie schwieriger sind, als man es bei diesen „offensichtlichen" Tatsachen erwarten würde.)[15]

Beweise für diese und weitere „offensichtliche" Tatsachen über endliche Mengen findet man zum Beispiel in Ebbinghaus 2003. Der erste Punkt ist die Äquivalenz von *endlich* und *Dedekind-endlich*; für den Beweis benötigt man in der Richtung „$\Leftarrow$" das Auswahlaxiom. Die Richtung „$\Rightarrow$" sowie die anderen Punkte in der Liste ergeben sich im Wesentlichen durch Induktionsbeweise. Schon die Wohldefiniertheit der Elementanzahl muss durch vollständige Induktion erst gezeigt werden.

Folgender Satz über endliche Mengen wird in der Analysis häufiger gebraucht (und wird ebenfalls durch vollständige Induktion nach der Elementanzahl bewiesen):

- Jede endliche nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält eine kleinste und eine größte Zahl.

2.6 Ein Axiomensystem der Analysis

In diesem Abschnitt wird ein Axiomensystem der Analysis unter Einbeziehung der benötigten Mengenaxiome vorgestellt.[16] Inhaltlich wird der Analysis hierdurch nichts hinzugefügt. Die hier angegebenen arithmetischen Axiome (Körperaxiome, Anordnungsaxiome) und das Vollständigkeitsaxiom findet man so (oder in äquivalenten Formulierungen) in jeder Analysis-Einführung. Die hier angegebenen Mengenaxiome findet man so (oder in äquivalenten Formulierungen) in jedem Lehrbuch zur axiomatischen Mengenlehre auf der Basis von ZFC. Der Unterschied zu gängigen Analysis-Einführungen besteht also lediglich darin, dass mit den Mengenaxiomen hier *explizit* formuliert wird, was ansonsten *implizit* vorausgesetzt wird. Alle Axiome werden dazu in einer einheitlichen Sprache formuliert, die dann zwischen Mengen und reellen Zahlen unterscheiden muss. Der Unterschied zu einer direkt auf ZFC aufsetzenden Analysis besteht darin, dass der mengentheoretische Aufbau des Zahlensystems und der Beweis der arithmetischen Axiome und des Vollständigkeitsaxioms entfallen kann. Diese axiomatische „Abkürzung" entspricht der weithin geübten universitären Praxis.

15. Siehe Behrends 2015, S. 66.

16. Ich übernehme das Axiomensystem im Wesentlichen aus Bedürftig und Murawski 2012 (S. 314f), mit dem Unterschied, dass ich zusätzliche, definierte Symbole verwende und das Paarmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome ebenfalls aufführe. Dafür kann das Schema der Ersetzungsaxiome für funktionale (statt für schwach funktionale) Ausdrücke formuliert werden.

Für die folgenden Betrachtungen gehe ich von einer formalen Sprache der ersten Stufe über der Symbolmenge

$$\mathcal{S} = \{0, 1, +, \cdot, \mathrm{r}, \mathrm{m}, <, \in\}$$

aus, wobei 0 und 1 Konstantensymbole, $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole, r, m einstellige Relationssymbole („ist eine reelle Zahl" bzw. „ist eine Menge") und $<, \in$ zweistellige Relationssymbole sind. Eine solche Sprache gestattet die übliche mengentheoretische Axiomatisierung der reellen Zahlen und der darauf aufbauenden Analysis. Ich nenne $\mathcal{S}$ auch die *Symbolmenge der (Standard-) Analysis* und die formale Sprache über $\mathcal{S}$ die *Sprache der (Standard-) Analysis.*

Zum allgemeinen Zeichenvorrat der Prädikatenlogik gehören noch Variablen, Klammern, das Gleichheitszeichen sowie die üblichen logischen Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ (nicht, und, oder, wenn-dann, genau-dann-wenn, für alle, es gibt).[17]

Zur Verkürzung und leichteren Lesbarkeit der Axiome verwende ich darüber hinaus noch folgende definierte Symbole:

$$\begin{aligned}
x \neq y \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg\, y = x \\
x \notin y \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg\, x \in y \\
x \leq y \quad &:\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y \\
A \subseteq B \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)
\end{aligned}$$

Außerdem gebrauche ich folgende Abkürzungen bei Quantoren:

$$\begin{aligned}
\forall^{\mathrm{r}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{r}(x) \Rightarrow \phi) \\
\forall^{\mathrm{m}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{m}(x) \Rightarrow \phi) \\
\exists^{\mathrm{r}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{r}(x) \wedge \phi) \\
\exists^{\mathrm{m}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{m}(x) \wedge \phi) \\
\exists^{=1} x\, \phi(x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\phi(x) \wedge \forall y\, (\phi(y) \Rightarrow y = x))
\end{aligned}$$

Die Axiome der Analysis gliedern sich in Körperaxiome, Anordnungsaxiome, Mengenaxiome und das Vollständigkeitsaxiom.

17. In Logikbüchern werden in formalen Ausdrücken statt der in der mathematischen Praxis etablierten Symbole $=, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ manchmal abweichend $\equiv, \to, \leftrightarrow$ verwendet.

Körperaxiome

$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad \mathrm{r}(x+y) \tag{0.1}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad x+y=y+x \tag{0.2}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x+y)+z=x+(y+z) \tag{0.3}$$
$$\mathrm{r}(0) \tag{0.4}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad x+0=x \tag{0.5}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad \exists^{\mathrm{r}} y\ x+y=0 \tag{0.6}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad \mathrm{r}(x \cdot y) \tag{0.7}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad x \cdot y=y \cdot x \tag{0.8}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z) \tag{0.9}$$
$$\mathrm{r}(1) \tag{0.10}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad x \cdot 1=x \tag{0.11}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad (x \neq 0 \Rightarrow \exists^{\mathrm{r}} y\ x \cdot y=1) \tag{0.12}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z \tag{0.13}$$
$$0 \neq 1 \tag{0.14}$$

Anordnungsaxiome

$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad (x \neq y \Rightarrow x<y \vee y<x) \tag{0.15}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad (x<y \Rightarrow \neg\, y<x) \tag{0.16}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (y<z \Rightarrow x+y<x+z) \tag{0.17}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (0<x \wedge y<z \Rightarrow x \cdot y<x \cdot z) \tag{0.18}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z) \tag{0.19}$$

Mengenaxiome

Das noch ausstehende Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen benutzt die Mengensprache. Daher werden zunächst die in Abschnitt 2.4 erwähnten Mengenaxiome, die in der Analysis benötigt werden, eingeschoben. Ich gebe sie jeweils in einer umgangssprachlichen und einer formalen Version an.

Extensionalitätsaxiom. Zwei Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, sind gleich. Formal:
$$\forall^{\mathrm{m}} A\, \forall^{\mathrm{m}} B\, (\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A=B) \tag{0.20}$$

Existenzaxiom. Es gibt eine Menge, die genau alle reellen Zahlen enthält. Formal:

$$\exists^{\mathrm{m}} A\, \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow \mathrm{r}(x)) \tag{0.21}$$

Die Menge A ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Aussonderungsaxiom (Schema). Sei ϕ ein Ausdruck mit der freien Variablen x und optional weiteren Parametern $a_1, \ldots, a_n$. Dann gibt es für alle $a_1, \ldots, a_n$ und für alle Mengen A eine Menge B, die genau die Elemente $x \in A$ enthält, für die $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ gilt. Formal:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n\, \forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, a_1, \ldots, a_n)) \tag{0.22}$$

Die (ggf. von $a_1, \ldots, a_n$ abhängige) Menge B ist nach dem Extensionalitäsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{x \in A \mid \phi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

bezeichnet.

Definition der leeren Menge. Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leer*. Nach dem Existenzaxiom und dem Aussonderungsaxiom gibt es eine leere Menge, zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq x\}$. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind alle leeren Mengen gleich. Die eindeutig bestimmte leere Menge wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Paarmengenaxiom. Für alle x, y existiert eine Menge A, die genau x und y als Elemente enthält. Formal:

$$\forall x \forall y \exists^{\mathrm{m}} A\, (\forall z\, (z \in A \Leftrightarrow z = x \vee z = y)) \tag{0.23}$$

Die Menge A ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird *die Paarmenge von x und y* genannt und mit $\{x, y\}$ bezeichnet.

Vereinigungsmengenaxiom. Zu jedem Mengensystem A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente von A enthält. Formal:

$$\forall A\, (\mathrm{Msys}(A) \Rightarrow \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow \exists Y\, (Y \in A \wedge x \in Y))) \tag{0.24}$$

mit

$$\mathrm{Msys}(A) \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(A) \wedge \forall y\, (y \in A \Rightarrow \mathrm{m}(y)). \tag{0.25}$$

Die Menge B ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird *die Vereinigung von A* genannt und mit $\bigcup A$ bezeichnet.

Potenzmengenaxiom. Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind. Formal:

$$\forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall X\, (X \in B \Leftrightarrow X \subseteq A) \tag{0.26}$$

Die Menge B ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird *die Potenzmenge von* A genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

Auswahlaxiom. Zu jedem paarweise disjunkten Mengensystem A mit $\emptyset \notin A$ gibt es eine Auswahlmenge B, die aus jedem der Elemente von A genau ein Element enthält. Formal:

$$\forall A\, \mathrm{Msys}(A) \wedge \mathrm{disjunkt}(A) \wedge \emptyset \notin A \Rightarrow \exists^{\mathrm{m}} B\, \mathrm{Auswahl}(B, A) \tag{0.27}$$

mit $\mathrm{Msys}(A)$ gemäß (0.25),

$$\begin{aligned} \mathrm{disjunkt}(A) \quad :\Leftrightarrow \quad & \forall X \forall Y \\ & (X \in A \wedge Y \in A \Rightarrow (X = Y \vee \neg \exists z\, (z \in X \wedge z \in Y))) \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Auswahl}(B, A) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall X\, (X \in A \Rightarrow \exists^{=1} y\, (y \in X \wedge y \in B))$$

Ersetzungsaxiom (Schema). Sei ϕ ein Ausdruck mit den freien Variablen x und y sowie optional weiteren Parametern $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n$: Wenn $\phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ funktional ist, dann gibt es zu jeder Menge A eine Menge B, die genau die y mit $\phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ und $x \in A$ enthält. Formal:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n\, (\forall x \exists^{=1} y\, \phi(x, y) \Rightarrow \forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, y))) \tag{0.28}$$

Der Teilausdruck $\forall x \exists^{=1} y\, \phi(x, y)$ formalisiert darin die Aussage „$\phi(x, y)$ ist funktional“, ordnet also jedem x genau ein y zu. Die in ϕ optional noch vorhandenen Parameter $a_1, \ldots, a_n$ werden hier zur Verkürzung der Ausdrücke in der Darstellung unterdrückt.

Ist $\phi(x, y)$ funktional, so ist die (ggf. von $a_1, \ldots, a_n$ abhängige) Menge B nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{y \mid x \in A \wedge \phi(x, y)\}$$

bezeichnet. Hat man zum funktionalen Ausdruck $\phi(x, y)$ ein Operationssymbol F eingeführt durch

$$\mathrm{F}(x) = y \quad :\Leftrightarrow \quad \phi(x, y),$$

so schreibt man für die Menge B auch

$$\{\mathrm{F}(x) \mid x \in A\}.$$

Auf der Basis der Mengenaxiome kann man die üblichen Mengenoperationen definieren und Rechenregeln dafür ableiten.

Vollständigkeitsaxiom

Ich formuliere das Vollständigkeitsaxiom nach Dedekind mittels Schnitten in $\mathbb{R}$. Dazu sei das einstellige Prädikat Schnitt(X) („X ist ein Schnitt in $\mathbb{R}$") definiert durch

$$\begin{aligned}\text{Schnitt}(X) \quad :\Leftrightarrow \quad & X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \neq \emptyset \wedge X \neq \mathbb{R} \wedge \\ & \forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y\,(x \in X \wedge y \notin X \Rightarrow x < y).\end{aligned}$$

Vollständigkeitsaxiom (Schnittaxiom). Jeder Schnitt in $\mathbb{R}$ wird durch eine reelle Zahl hervorgebracht. Formal:

$$\forall X(\text{Schnitt}(X) \Rightarrow \exists^{\mathrm{r}} z \forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y\,(x \in X \wedge y \notin X \Rightarrow x \leq z \wedge z \leq y)) \tag{0.29}$$

Das Axiomensystem der Analysis ist damit komplett. Alle Definitionen und Sätze können wie gewohnt behandelt werden.

Bemerkung zum archimedischen Axiom. Wird die Vollständigkeit mittels Cauchy-Folgen oder Intervallschachtelungen formuliert, braucht man (wie bereits in Abschnitt 2.3 angemerkt) zusätzlich noch das archimedische Axiom. Bei dem hier gewählten Zugang über Schnitte kann die archimedische Anordnung als Satz gefolgert werden.[18]

Satz des Archimedes. Jede reelle Zahl wird von einer natürlichen Zahl übertroffen. Oder, gleichbedeutend: Die Menge $\mathbb{N}$ ist (in $\mathbb{R}$) nach oben unbeschränkt. Formal:

$$\forall^{\mathrm{r}} x \exists n\,(n \in \mathbb{N} \wedge x < n).$$

2.7 Modelltheoretischer Exkurs

In der mathematischen Logik werden Terme und Ausdrücke einer formalen Sprache rein syntaktisch, also losgelöst von jeder Bedeutung, als – nach bestimmten induktiven Kalkülen aufgebaute – Zeichenreihen über einem bestimmten Alphabet definiert.[19] Das Alphabet enthält neben allgemeinen Grundsymbolen (Gleichheitszeichen, Klammern, Variablen, logische Junktoren und Quantoren) optional

18. Siehe z. B. Heuser 2009, S. 73.
19. Siehe z. B. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2007

sprachspezifische Symbole (Konstanten-, Funktions-, und Relationssymbole). Die Menge der sprachspezifischen Symbole bezeichnet man als die *Symbolmenge* der Sprache. Die Symbolmenge der Sprache der Standardanalysis ist die in Abschnitt 2.6 angegebene Menge $\mathcal{S}$.

Als spezielle Terme kann man *Einsensummenterme* so definieren:

- 1 ist ein Einsensummenterm.
- Ist τ ein Einsensummenterm, so ist auch $\tau + 1$ ein Einsensummenterm.

Der Zusammenhang mit den metasprachlichen natürlichen Zahlen wird durch folgende induktive Definition hergestellt ($\mathfrak{n}'$ sei darin der Nachfolger von $\mathfrak{n}$):

$$\begin{aligned} \mathrm{EST}(\mathfrak{1}) &:= 1 \\ \mathrm{EST}(\mathfrak{n}') &:= \mathrm{EST}(\mathfrak{n}) + 1 \end{aligned}$$

EST ordnet also jeder metasprachlichen natürlichen Zahl $\mathfrak{n}$ einen Einsensummenterm mit $\mathfrak{n}$ Summanden zu.

$$\mathrm{EST}(\mathfrak{n}) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\mathfrak{n}\text{-mal}}.$$

Durch metasprachliche Induktion zeigt man, dass es umgekehrt zu jedem Einsensummenterm τ genau eine metasprachliche natürliche Zahl $\mathfrak{n}$ mit $\mathrm{EST}(\mathfrak{n}) = \tau$ gibt. Soweit sind die Überlegungen rein syntaktischer Natur und kommen mit dem potentiell Unendlichen aus.

Setzt man eine Hintergrundmengenlehre voraus, die aktual unendliche Mengen und die Ableitung des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes erlaubt (dies ist zum Beispiel in der ZFC-Mengenlehre der Fall[20]), sind modelltheoretische Betrachtungen möglich. Terme und Ausdrücke (genauer $\mathcal{S}$-Terme und $\mathcal{S}$-Ausdrücke) erhalten dann eine Bedeutung durch ihre *Interpretation* in *$\mathcal{S}$-Strukturen*, welche die Hintergrundmengenlehre bereitstellt. Eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{a})$ ist ein Paar, bestehend aus einer TRÄGERMENGE[21] $\mathcal{A}$ und einer ABBILDUNG $\mathfrak{a}$, die jedem Symbol aus $\mathcal{S}$ seine Interpretation zuordnet, genauer, jedem Konstantensymbol ein ELEMENT in $\mathcal{A}$, jedem $\mathfrak{n}$-stelligen Funktionssymbol eine $\mathfrak{n}$-stellige FUNKTION über $\mathcal{A}$ und jedem $\mathfrak{n}$-stelligen Relationssymbol eine $\mathfrak{n}$-stellige RELATION über $\mathcal{A}$. Die Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{S}$ in der Struktur $\mathfrak{A}$ werden häufig so bezeichnet, dass man den jeweiligen Symbolen die hochgestellte Bezeichnung der Struktur anfügt, etwa $1^{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{a}(1)$ und $+^{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{a}(+)$.

20. Siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2007, S. 118-122.

21. Ich wähle in diesem Abschnitt die Kapitälchenschrift, wenn ich mengentheoretische Begriffe wie MENGE, ELEMENT, ABBILDUNG, RELATION etc. im Sinne der Hintergrundmenge gebrauche.

Induktiv wird die Interpretation auf alle Terme der Sprache fortgesetzt, zum Beispiel

$$(\sigma + \tau)^{\mathfrak{A}} := \sigma^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} \tau^{\mathfrak{A}}$$

für Terme σ und τ. Jeder variablenfreie Term (zum Beispiel jeder Einsensummenterm) erhält so eine Interpretation als ein ELEMENT von $\mathcal{A}$. Bei Termen mit Variablen hängt die Interpretation von der *Belegung* der Variablen mit ELEMENTEN aus $\mathcal{A}$ ab. Die Belegung wird in eckigen Klammern dem Term angehängt. Für eine Variable n und ein ELEMENT a aus $\mathcal{A}$ ist zum Beispiel

$$(n + 1)^{\mathfrak{A}}[a] = n^{\mathfrak{A}}[a] +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} = a +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}}$$

Ein Ausdruck ϕ erhält durch die Interpretation in $\mathfrak{A}$ eine strukturspezifische „Übersetzung“ in eine in der Hintergrundmengenlehre gültige oder ungültige Aussage. Im ersten Fall schreibt man $\mathfrak{A} \models \phi$ („$\mathfrak{A}$ ist ein Modell von ϕ“), im zweiten Fall $\mathfrak{A} \not\models \phi$ („$\mathfrak{A}$ ist kein Modell von ϕ“). Enthält ein Ausdruck freie Variablen, so ist die Modelleigenschaft von der Belegung dieser Variablen abhängig. Wie bei Termen wird die Belegung in eckigen Klammern angehängt.

Genauer ist die Modellbeziehung induktiv über den Aufbau der Ausdrücke definiert. Ich gebe wieder nur Beispiele an. σ, τ sind darin beliebige Terme und ϕ, ψ beliebige Ausdrücke. „:gdw“ steht abkürzend für „definitionsgemäß genau dann, wenn“ und $\in^{\mathrm{H}}$ für „ist ELEMENT von“ (im Sinne der Hintergrundmengenlehre).

$$\mathfrak{A} \models \sigma \in \tau \quad \text{:gdw} \quad \sigma^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \tau^{\mathfrak{A}} \tag{0.30}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi \quad \text{:gdw} \quad \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi \tag{0.31}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi \Rightarrow \psi \quad \text{:gdw} \quad \text{wenn } \mathfrak{A} \models \phi, \text{ dann } \mathfrak{A} \models \psi \tag{0.32}$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x\, \phi(x) \quad \text{:gdw} \quad \text{für alle } a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A} \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi(x)[a] \tag{0.33}$$

Die Bedeutung der Symbole aus $\mathcal{S}$ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ kann eine völlig andere sein als die gewohnte. Zum Beispiel muss für zwei ELEMENTE a, b in $\mathcal{A}$ mit $a \in^{\mathfrak{A}} b$ nicht (im Sinne der Hintergrundmengenlehre) a ein ELEMENT von b (also $a \in^{\mathrm{H}} b$) sein.

Ist Φ eine MENGE von Ausdrücken und gilt $\mathfrak{A} \models \phi$ für alle ϕ in Φ, so heißt $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ (kurz: $\mathfrak{A} \models \Phi$). Da die Interpretation der logischen Symbole der üblichen (metasprachlichen) Bedeutung folgt, ist $\mathfrak{A}$ dann auch ein Modell jedes aus Φ ableitbaren Ausdrucks.

Nach dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz hat jedes widerspruchsfreie (in einer Sprache der ersten Stufe formulierte) Axiomensystem ein Modell (sogar ein abzählbares Modell).[22]

22. Die ABZÄHLBARKEIT eines Modells steht nicht im Widerspruch zur Ableitbarkeit der Existenz einer überabzählbaren Menge U, deren Elemente alle in $\mathcal{A}$ interpretiert werden. Die Überabzählbarkeit von U bedeutet ja nur, dass es kein $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gibt, das die Interpretation einer bijektiven Abbildung von U nach $\mathbb{N}$ ist. Dies ist das sogenannte Skolem-Paradoxon.

Φ sei das Axiomensystem der Analysis aus Abschnitt 2.6. Unter der Prämisse, dass Φ widerspruchsfrei ist[23], gibt es also ein Modell $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{a})$ von Φ. Aufgrund der Modelleigenschaft von $\mathfrak{A}$ gibt es zu jeder in Φ definierbaren Konstante c ein eindeutig bestimmtes ELEMENT $\mathrm{c}^{\mathfrak{A}}$ in $\mathcal{A}$, sodass für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models (x = \mathrm{c})[a] \quad \text{gdw} \quad a = \mathrm{c}^{\mathfrak{A}}. \tag{0.34}$$

Ebenso gibt es zu jedem in Φ definierbaren $\mathfrak{n}$-stelligen Prädikat P eine eindeutig bestimmte $\mathfrak{n}$-stellige RELATION $\mathrm{P}^{\mathfrak{A}}$ über $\mathcal{A}$, sodass für alle $a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}} \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{P}(x_{\mathfrak{1}}, \ldots, x_{\mathfrak{n}})[a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}}] \quad \text{gdw} \quad \mathrm{P}^{\mathfrak{A}}(a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}}). \tag{0.35}$$

Mit den definierenden Ausdrücken

$$\begin{aligned}
X = \mathbb{R} \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(X) \wedge \forall x\,(x \in X \Leftrightarrow \mathrm{r}(x)) \\
X \subseteq Y \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in Y) \\
\mathrm{ind}(X) \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(X) \wedge 1 \in X \wedge \forall x\,(x \in X \Rightarrow x + 1 \in X) \\
X = \mathbb{N} \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{ind}(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{ind}(Y) \Rightarrow X \subseteq Y)
\end{aligned}$$

erhält man so Interpretationen $\mathbb{R}^{\mathfrak{A}}, \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$ der Konstanten $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ sowie Interpretationen $\mathrm{ind}^{\mathfrak{A}}, \subseteq^{\mathfrak{A}}$ der ein- bzw. zweistelligen Prädikate $\mathrm{ind}, \subseteq$.

In jedem Modell $\mathfrak{A}$ der Analysis hat jeder Einsensummenterm τ genau eine Interpretation $\tau^{\mathfrak{A}}$. Durch metasprachliche Induktion zeigt man: Für zwei Einsensummenterme σ und τ sind die Interpretationen $\sigma^{\mathfrak{A}}$ und $\tau^{\mathfrak{A}}$ genau dann gleich, wenn σ und τ gleich viele Summanden haben. $\mathbb{N}^{\mathrm{H}}$ bezeichne die MENGE der metasprachlichen natürlichen Zahlen. Die metasprachlich gebildete MENGE

$$\mathcal{N} := \{\tau^{\mathfrak{A}} \mid \tau \text{ ist ein Einsensummenterm}\} = \{\mathrm{EST}(\mathfrak{n})^{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{n} \in^{\mathrm{H}} \mathbb{N}^{\mathrm{H}}\}$$

ist eine TEILMENGE von $\mathcal{A}$. Sie ist ein Konstrukt der Hintergrundmengenlehre und steht in der Objektsprache der Analysis, also theorie-*intern* nicht zur Verfügung. Daher kann sie nicht zur Definition der Menge $\mathbb{N}$ innerhalb der Analysis dienen. Man kann aber die MENGE $\mathcal{N}$ in der Hintergrundmengenlehre (also theorie-*extern*) mit der MENGE

$$\mathcal{N}' := \{a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A} \mid a \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}\}$$

vergleichen. $\mathcal{N}$ enthält genau die interpretierten Einsensummenterme (und damit umkehrbar eindeutig Entsprechungen der metasprachlichen natürlichen Zahlen). $\mathcal{N}'$ enthält die objektsprachlichen natürlichen Zahlen, aber *extern* betrachtet (als ELEMENTE der TRÄGERMENGE des Modells). Es gilt folgender

23. Φ ist konsistent relativ zu ZFC, denn man kann innerhalb von ZFC die über $\in$ hinausgehenden Symbole aus $\mathcal{S}$ auf die übliche Weise definieren. Die Axiome aus Φ sind dann in ZFC beweisbar, und man erhält so zu jedem Modell von ZFC ein Modell von Φ.

Metasprachlicher Satz 1 *Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ (also ein Modell der Standardanalysis). Dann gilt: $\mathcal{N}$ ist eine* TEILMENGE von $\mathcal{N}'$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{A} \models \mathrm{ind}(\mathbb{N})$ gilt $1^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$ und für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$: wenn $a \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$, dann $a +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$. Mittels metasprachlicher Induktion folgt daraus für jeden Einsensummenterm τ: $\tau^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$. Also ist $\mathcal{N}$ eine TEILMENGE von $\mathcal{N}'$, qed.

Die Gleichheit von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ gilt im Allgemeinen nicht. Zwar gilt für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ mit $\mathrm{ind}^{\mathfrak{A}}(a)$ auch $\mathbb{N}^{\mathfrak{A}} \subseteq^{\mathfrak{A}} a$, es ist aber nicht gesagt, dass $\mathcal{N}$ überhaupt ein ELEMENT von $\mathcal{A}$ ist. Daher ist der Schluss auf $\mathcal{N}$ nicht anwendbar.

In der Standardanalysis kann also nicht behauptet werden, dass $\mathbb{N}$ gerade die Einsensummen $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ enthält. Es könnte in $\mathbb{N}$ unerreichbare Zahlen geben, die nicht durch fortgesetzte Aufsummierung von Einsen erreicht werden. Dies wird sich in Abschnitt 3 bestätigen.

2.8 Welches sind die richtigen natürlichen Zahlen?

Die Notwendigkeit, zwischen den natürlichen Zahlen der verschiedenen Sprachebenen zu unterscheiden, mag zu der Frage verleiten, welches denn nun die „richtigen" natürlichen Zahlen sind. Allerdings verlassen wir mit einer solchen Frage den Zuständigkeitsbereich der Mathematik, zumindest der Mathematik, wie sie heute verstanden wird.

Die moderne, formalistisch geprägte Mathematik gibt keine ontologischen Antworten. Behrends weist in den Vorbemerkungen seines Analysis-Lehrbuchs darauf hin,

> [...] dass Mathematik nicht untersucht, was ist, sondern was sich folgern lässt.[24]

Mathematische Antworten sind somit immer an den axiomatischen Rahmen gebunden, in dem sie gegeben werden. Wenn in der Mathematik etwas „ist", dann deshalb, weil das vorausgesetzte Axiomensystem konsistent ist (bzw. die Konsistenz angenommen wird) oder die fragliche Existenz explizit in den Axiomen postuliert wird oder sich aus den Axiomen folgern lässt. Es ist eine *theoretische* Existenz. Die Dinge, von denen die Axiome handeln (und deren Existenz angenommen wird), werden nur *implizit* durch die Axiome definiert. Über das „Wesen" der Dinge schweigt sich die Mathematik aus.

Was wir von den natürlichen Zahlen in der Mathematik erwarten, wird seit Peano und Dedekind durch die Peano-Dedekind'schen Axiome – meist kurz nur *Peano-Axiome* genannt – festgelegt. Sie charakterisieren die natürlichen Zahlen, bis auf

24. Siehe Behrends 2015, S. 5.

Isomorphie, eindeutig, sind aber, wegen des Induktionsaxioms, nur in der Prädikatenlogik der zweiten Stufe formulierbar.[25] Mit dem Konstantensymbol 0, dem einstelligen Funktionssymbol σ und der Prädikatsvariablen X lauten die Axiome in moderner Notation so:

(P1) $\forall x \neg \sigma x = 0$

(P2) $\forall x \forall y\, (\sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y)$

(P3) $\forall X (X0 \wedge \forall x\, (Xx \Rightarrow X\sigma x) \Rightarrow \forall y\, Xy)$

Die Modelle von (P1) bis (P3) sind gerade die *Peano-Strukturen*, also die Strukturen mit einer Trägermenge A und einer auf A definierten Funktion ν (die Interpretation von σ) und einem Element a aus A (der Interpretation von 0), sodass gilt:

(P1') $\nu\colon A \overset{\text{inj}}{\to} A$

(P2') $a \notin \text{Bild}(\nu)$

(P3') $\forall B (B \subseteq A \wedge a \in B \wedge \forall x\, (x \in B \Rightarrow \nu(x) \in B) \Rightarrow B = A)$

Nach dem Satz von Dedekind sind alle Peano-Strukturen isomorph. (P1') bis (P3') sind die mengentheoretische Version der Peano-Axiome, auf die sich Forster beruft, wenn er die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ als die Menge der richtigen natürlichen Zahlen identifiziert. Diese Menge $\mathbb{N}_0$ ist mit $a := 0$ und $\nu(x) := x + 1$ eine Peano-Struktur gemäß (P1') bis (P3').

Schließen die Peano-Axiome und der Satz von Dedekind die Existenz unerreichbarer Zahlen aus? Nein. Wie schon in Abschnitt 2.3 angedeutet, ist nicht auszuschließen, dass $\mathbb{N}_0$ – und damit alle Peano-Strukturen – unerreichbare Elemente enthalten. Dies ist keine Besonderheit des hier zu Grunde gelegten Axiomensystems Φ, sondern bedingt durch die Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache.

In ZFC, was normalerweise als Axiomensystem für die Hintergrundmengenlehre angenommen wird, wird eine Menge N induktiv genannt, wenn

1. $\emptyset \in N$,
2. $\forall x (x \in N \Rightarrow x \cup \{x\} \in N)$.

Das Unendlichkeitsaxiom von ZFC postuliert die Existenz einer induktiven Menge, und ω wird dann als (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge definiert. Mit $a := \emptyset$ und $\nu(x) := x \cup \{x\}$ folgt, dass ω eine Peano-Struktur gemäß (P1') bis (P3') ist. Daher können die Elemente von ω als die natürlichen Zahlen in ZFC aufgefasst werden. Zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl $\mathfrak{n}$ hat

25. Siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2007, S. 52f.

man (durch $\mathfrak{n}$-fache Anwendung von ν) ein Element $\nu^{\mathfrak{n}}(0)$ aus ω. Die Überlegungen aus den Abschnitten 2.3 und 2.7 gelten dann analog. Die Menge aller $\nu^{\mathfrak{n}}(0)$ kann theorie-intern nicht gebildet werden. Die metasprachlichen und die objektsprachlichen, *theoretischen* natürlichen Zahlen fallen auseinander. Die Existenz unerreichbarer Zahlen ist nicht ausgeschlossen.

Über die theoretischen natürlichen Zahlen (welcher Theorie auch immer) kann nur das gesagt werden, was aus den Axiomen ableitbar ist. Insbesondere kann nicht angenommen werden, dass eine Aussage über *alle* theoretischen natürlichen Zahlen in einem absoluten, apriorischen Sinne wahr oder falsch sein muss, weil nicht klar ist, was „alle" bedeutet. Es hängt von der darunter liegenden Mengenlehre ab, die die Peano-Strukturen bereitstellt und die unterschiedlichste Modelle haben kann. Daher fällt es schwer, theoretische natürliche Zahlen als die „richtigen" (in einem absoluten Sinne) anzuerkennen.

Es bleibt die „naive" Antwort: Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen, die wir zum Zählen benutzen, also $1, 2, 3, \ldots$ oder, noch elementarer $|, ||, |||, \ldots$. Diese Zahlen sind *potentiell* unendlich. Über sie als Gesamtheit sprechen zu wollen, transzendiert den naiven Zähl-Ansatz und führt zu theoretischen natürlichen Zahlen, welche der Mengenlehre als Modell-Lieferant bedürfen.

Sind also die naiven, nur potentiell unendlichen natürlichen Zahlen die *richtigen* natürlichen Zahlen? Dafür spricht, dass sich hier die Kluft zwischen Metasprache und Objektsprache nicht auftut, denn der Anspruch, über aktual unendliche Gesamtheiten zu sprechen, wird gar nicht erhoben. Einen solchen Schluss wird freilich nur derjenige ziehen können, der nicht einem Realismus Gödel'scher Prägung anhängt.

Für Gödel existierten mathematische Gegenstände, wie die der Mengenlehre, *objektiv.* Sie waren für ihn *real* (in einem immateriellen und aktual unendlichen mathematischen Universum). Zumindest hielt Gödel den Glauben an ihre Existenz für genauso legitim, wie den Glauben an die Existenz physischer Körper. In *Russell's mathematical logic* sagt er über Klassen (classes) und Begriffe (concepts):

> Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, namely, classes as "pluralities of things" or as structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions.
>
> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory systems of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to

> assert about these entities as propositions about the “data”, i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions.[26]

Für die mathematische Praxis sind ontologische Fragen wenig relevant. Wir betreiben Mathematik üblicherweise auf dem Boden der Mengenlehre und verwenden dabei die *theoretischen* natürlichen Zahlen, welche die Mengenlehre (über die Peano-Strukturen) bereithält. Dies können wir tun, unabhängig davon, ob das Mengenuniversum real ist oder fiktiv. Wir müssen uns aber dann damit abfinden, dass die Existenz unerreichbarer natürlicher Zahlen nicht ausgeschlossen ist. Allerdings können wir die Existenz solcher Zahlen (ohne weitere Annahmen) auch nicht beweisen.

3 Eine Chance für Nichtstandard

In der Analysis (inklusive der Mengenaxiome) ist folgender Satz beweisbar: Jeder vollständige archimedisch angeordnete Körper ist isomorph zu $\mathbb{R}$.[27] Aus der archimedischen Anordnung folgt, dass die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dass also jede reelle Zahl von einer natürlichen Zahl übertroffen wird. Daher mag es „standard-geschulte“ Mathematiker überraschen, dass es trotz der archimedischen Anordnung infinite und infinitesimale Zahlen in $\mathbb{R}$ geben kann. Die Möglichkeit der Existenz solcher Zahlen ist einfach eine konsequente Fortsetzung der vorangegangenen Überlegungen zu den natürlichen Zahlen. Zwar muss eine infinite Zahl größer sein als $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ (allgemein als jede Einsensumme) und eine infinitesimale Zahl kleiner als der Kehrwert jeder Einsensumme. Aber eine infinite Zahl muss nicht größer als *jede* natürliche Zahl sein und eine infinitesimale Zahl nicht kleiner als der Kehrwert *jeder* natürlichen Zahl. Gibt es unerreichbare Zahlen in $\mathbb{N}$, so ist damit auch die Möglichkeit infiniter und infinitesimaler Zahlen in $\mathbb{R}$ gegeben (unter Wahrung der archimedischen Anordnung).

Beachtet man den Unterschied zwischen metasprachlichen und objektsprachlichen natürlichen Zahlen, besteht kein Grund anzunehmen, dass die Menge $\mathbb{N}$ ausschließlich Zahlen enthält, die durch Einsensummenterme dargestellt werden. Vielmehr könnte es unerreichbare Zahlen in $\mathbb{N}$ geben, die größer als jede Einsensumme sind, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird. Alles, was man dazu braucht, ist ein neues, (im Allgemeinen) nicht mengenbildendes Prädikat und zusätzliche Axiome.

Jetzt wird deutlich, dass der in der Analysis bewiesene Satz der vollständigen Induktion stärker ist als eine metasprachliche Induktion über Einsensummenterme. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche die 1 enthält und mit jedem n auch $n+1$, ist mit $\mathbb{N}$ identisch, enthält also auch die (möglicherweise existierenden) unerreichbaren Zahlen.

26. Siehe Gödel 1944, enthalten in Schilpp 1944, S. 137
27. Siehe z. B. Ebbinghaus u. a. 1992, S. 42

Wie kann man in der Objektsprache über unerreichbare Zahlen sprechen? Schließlich steht in der Objektsprache ein Prädikat „durch Einsensummen darstellbar“ nicht zur Verfügung und damit auch nicht die Prädikate „erreichbar“ oder „unerreichbar“. Man kann aber ein neues Basisprädikat „standard“ in die Objektsprache einführen, das gewissermaßen für das metasprachliche „erreichbar“ einspringt. Es ist damit zwar nicht möglich, die Standardzahlen unmittelbar mit den erreichbaren Zahlen zu identifizieren, denn *standard* ist dann ein objektsprachlicher Begriff und *erreichbar* ein metasprachlicher Begriff. Man kann aber durch geeignete Axiome dafür sorgen, dass alle erreichbaren Zahlen Standardzahlen und damit alle Nichtstandardzahlen unerreichbar sind.

Den Axiomen der Standardanalysis (inklusive der benötigten Mengenaxiome) werden in diesem Abschnitt drei weitere Axiomenschemata hinzugefügt, die den Umgang mit dem neuen Prädikat „standard“ regeln, und zwar die Axiomenschamata I, S und T der sogenannten *Internen Mengenlehre* (im Original *Internal Set Theory*) von Edward Nelson.[28] Die so erweiterte Analysis nenne ich daher im Folgenden *IST-Analysis*.

Da die bisherigen Axiome nicht verändert werden, bleiben alle Definitionen und Sätze der Standardanalysis auch in der IST-Analysis gültig. $\mathbb{N}$ wird, wie bisher, als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt weiterhin der Satz der vollständigen Induktion. $\mathbb{R}$ ist weiterhin archimedisch angeordnet, und alle vollständigen archimedisch angeordneten Körper sind isomorph zu $\mathbb{R}$. Es werden aber durch die neuen Axiome gegenüber der Standardanalysis neue Definitionen möglich und neue Sätze beweisbar. Zum Beispiel wird es in der IST-Analysis in $\mathbb{R}$ infinite und infinitesimale Zahlen geben, mit denen man den Grenzwertformalismus vollständig vermeiden kann.

3.1 Erweiterung der Sprache

Die formale Sprache der Analysis wird erweitert um das neue einstellige Relationssymbol s (für das undefinierte Basisprädikat „standard“). Ein beliebiges Objekt x des Universums der IST-Analysis ist also entweder standard ($\mathrm{s}(x)$) oder nicht standard ($\neg\mathrm{s}(x)$).

Zur Generalisierung bzw. Partikularisierung über alle Standardobjekte werden folgende Abkürzungen vereinbart:

$$\begin{aligned} \forall^{\mathrm{s}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{s}(x) \Rightarrow \phi) \\ \exists^{\mathrm{s}} x\, \phi \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{s}(x) \wedge \phi) \end{aligned}$$

Ich verwende gelegentlich auch die Kombinationen mit den Prädikaten m bzw. r:

28. Erstmals vorgestellt 1977 (siehe Nelson 1977).

- $\forall^{\mathrm{sm}}$ („Für alle Standardmengen“)
- $\forall^{\mathrm{sr}}$ („Für alle reellen Standardzahlen“)
- $\exists^{\mathrm{sm}}$ („Es gibt eine Standardmenge“)
- $\exists^{\mathrm{sr}}$ („Es gibt eine reelle Standardzahl“)

Zum Beispiel steht der Ausdruck $\forall^{\mathrm{sm}} A\, \phi$ abkürzend für

$$\forall A\, (\mathrm{s}(A) \wedge \mathrm{m}(A) \Rightarrow \phi)$$

und der Ausdruck $\exists^{\mathrm{sr}} x\, \phi$ abkürzend für

$$\exists x\, (\mathrm{s}(x) \wedge \mathrm{r}(x) \wedge \phi).$$

Metasprachliche Definition 1 *Ein Ausdruck heißt* intern, *wenn er das Prädikat* s *weder direkt noch indirekt enthält. Alle anderen Ausdrücke heißen* extern.

Wenn die neue Theorie Nichtstandardobjekte enthalten, aber gegenüber der Standardtheorie konservativ sein soll, muss das neue Prädikat s für die Standardtheorie gewissermaßen unsichtbar sein. Das heißt, s darf in den aus der Standardtheorie übernommenen Axiomen nicht vorkommen. Von dieser Bedingung sind die Axiomenschemata der Aussonderung und der Ersetzung betroffen. Es wird also in der neuen Theorie im Allgemeinen nicht möglich sein, zu einer vorgegebenen Menge A Mengen der Art

$$\{x \in A \mid \phi(x)\}$$

oder

$$\{y \mid x \in A \wedge \psi(x, y)\}$$

zu bilden, wenn ϕ ein externer Ausdruck bzw. ψ ein externer funktionaler Ausdruck ist. Die Axiomenschemata gelten (wie in der Standardtheorie) nur für interne Ausdrücke. Externe Ausdrücke sind im Allgemeinen *nicht mengenbildend*.

Es mag auf den ersten Blick unbefriedigend erscheinen, dass ein so plausibles Axiom wie das der Aussonderung nicht mehr für alle Prädikate gelten soll, aber dies ist gerade essentiell für die angestrebte Erweiterung der Theorie. Man vergleiche die Situation mit der Zulassung aktual unendlicher Mengen Ende des 19. Jahrhunderts. Um nicht unmittelbar zu Widersprüchen zu kommen, musste man das plausible euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil“ aufgeben.

Nun geht es in der Analysis nicht vornehmlich um natürliche, sondern um reelle Zahlen und um Mengen. Daher darf die Unterscheidung von standard und nichtstandard nicht auf natürliche Zahlen beschränkt bleiben. Man wird zum Beispiel erwarten, dass $\frac{1}{n}$ und $\sqrt[n]{2}$ reelle Standardzahlen und $\{n\}$ und das Intervall $[0, n]$ Standardmengen sind, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Standardzahl ist, aber reelle Nichtstandardzahlen bzw. Nichtstandardmengen, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Nichtstandardzahl ist.

Allgemein sind alle Objekte des Universums entweder standard oder nicht standard.

Mittels des neuen Prädikats s lassen sich folgende für die Analysis wichtige externe Prädikate definieren:

Definition 1

$$\begin{aligned} x \approx 0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall^{\mathrm{sr}} y \, (y > 0 \Rightarrow |x| < y), \\ x \approx y \quad &:\Leftrightarrow \quad x - y \approx 0, \\ x \textit{ finit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists^{\mathrm{sr}} y \, |x| < y, \\ x \gg 1 \quad &:\Leftrightarrow \quad x > 1 \wedge \neg(x \textit{ finit}). \end{aligned}$$

$x \approx 0$ wird gelesen als „x ist infinitesimal“, $x \approx y$ als „x ist infinitesimal benachbart zu y“ und $x \gg 1$ als „x ist (positiv) infinit“.

$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}$.

3.2 Erweiterung des Axiomensystems

Das Axiomensystem Φ der Standardanalysis aus Abschnitt 2.6 wird beibehalten und ergänzt um drei Axiomenschemata, die mit I, S und T abgekürzt werden (für Idealisierung, Standardisierung bzw. Transfer).

Das Transferaxiom T

Ein *Standardausdruck* sei ein interner Ausdruck, der eventuell noch Standardparameter (zum Beispiel Konstanten) enthält.

Das Transferaxiom T besagt: Ist ϕ ein Standardausdruck mit der einzigen freien Variablen x, dann gilt ϕ für alle x genau dann, wenn ϕ für alle standard x gilt. Die Richtung von links nach rechts ist dabei trivial.

Eine äquivalente Umformulierung T' lautet: Ist ϕ ein Standardausdruck mit der einzigen freien Variablen x, dann gilt ϕ für mindestens ein x genau dann, wenn ϕ für mindestens ein standard x gilt. In dieser Variante ist die Richtung von rechts nach links trivial.

Was macht die umgekehrte Richtung plausibel? Es ist die Absicht, dass die neuen Axiome die Standardtheorie erweitern, aber in ihrem Bestand nicht verändern sollen. Wenn etwas in der Standardtheorie eindeutig definierbar ist (zum Beispiel die Zahl π, die Exponentialfunktion, die Menge $\mathbb{N}$ oder deren Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), dann ist es nach T' ein Standardobjekt. Vereinfacht gesagt: Standarddefinitionen führen zu Standardobjekten.

Insbesondere sind für beliebige Standardmengen A und B auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, B^A, $\{A\}$ und $\mathcal{P}(A)$ Standardmengen.

Die formalisierte Fassung des Transferaxioms ist

Axiom 1 (Transferaxiom T, Schema) *Sei $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ ein interner Ausdruck mit den freien Variablen $x, a_1, \ldots, a_n$ (und keinen weiteren freien Variablen). Dann gilt*

$$\forall^s a_1 \ldots \forall^s a_n \quad (\forall^s x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \forall x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n)). \tag{0.36}$$

In der äquivalenten Variante T' lautet der formalisierte Ausdruck

$$\forall^s a_1 \ldots \forall^s a_n \quad (\exists x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists^s x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n)). \tag{0.37}$$

Als unmittelbare Folgerung erhält man

Satz 1 *Für alle Standardmengen A, B gilt*

$$\forall^s x\, (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subseteq B \tag{0.38}$$
$$\forall^s x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B \tag{0.39}$$

Um die Inklusion oder die Gleichheit von Standardmengen zu zeigen, reicht es also, nur die Standardelemente der Mengen zu betrachten. Insbesondere sind zwei Standardmengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Standardelemente enthalten.

Weitere Folgerungen aus T bzw. T' sind:

- Alle in der Standardanalysis definierbaren Objekte sind in der IST-Analysis Standardobjekte.
- Standardfunktionen haben für Standardargumente Standardfunktionswerte.

Das Idealisierungsaxiom I

Das Transferaxiom macht zwar Aussagen über Nichtstandardobjekte, aber es garantiert nicht, dass es überhaupt Nichtstandardobjekte gibt. Um die Existenz von Nichtstandardobjekten zu sichern, braucht man ein weiteres Axiom, das Idealisierungsaxiom I.

Die Grundidee von I ist eine Verallgemeinerung des Anspruchs, dass es jenseits der beliebig großen natürlichen Standardzahlen noch unendlich große, metasprachlich unerreichbare Nichtstandardzahlen geben soll.

Dass es beliebig große natürliche Standardzahlen gibt, kann man so ausdrücken: Zu jeder endlichen Menge E von natürlichen Standardzahlen, gibt es eine natürliche Standardzahl, die größer als jedes Element von E ist.

In dieser Formulierung lässt sich der Nichtstandard-Anspruch auf beliebige zweistellige Relationen verallgemeinern und damit das potentielle Anwendungsspektrum von Nichtstandard-Methoden sehr weit ausdehnen.

Für eine zweistellige Relation $\phi(x, y)$ führe man die Sprechweise „x dominiert y (im Sinne von ϕ)“ ein (man denke etwa an Relationen wie $y < x$ oder $y \in x$). Dann lässt sich der Nichtstandard-Anspruch so formulieren: Wenn es zu jeder endlichen Menge E von Standardobjekten ein Standardobjekt gibt, das jedes Element von E dominiert, dann gibt es ein Objekt, das *alle* Standardobjekte dominiert. Diese Forderung bezeichne ich vorläufig als Axiom I1.

Wie bisher bedeutet „A ist endlich“, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A und $\mathbb{N}_{\leq n} := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ gleichmächtig sind. Was passiert nun, wenn n eine Nichtstandardzahl ist? Es erscheint zunächst wie ein nichtstandard-spezifisches Paradoxon, dass die *endliche* Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$ die (zumindest potentiell) *unendlich* vielen erreichbaren Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ enthalten kann. Aber diese paradoxe Möglichkeit gibt es in der Standardanalysis auch. Die Standardanalysis „sieht“ sie bloß nicht, weil sie (mangels des Prädikats s) „blind“ für die Unterscheidung von Standardzahlen und (unerreichbaren) Nichtstandardzahlen ist.

Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind unendlich, und sie sind Standardmengen, da sie sich durch interne Ausdrücke definieren lassen. Andererseits enthalten sie nach dem vorläufigen Axiom I1 auch Nichtstandardelemente. Standardmengen können also Nichtstandardelemente enthalten. Von der endlichen Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$ erwarten wir dagegen, dass sie genau dann standard ist, wenn alle ihre Elemente standard sind. In Verallgemeinerung dieser Erwartung erscheint folgende Festlegung plausibel, die ich als vorläufiges Axiom I2 bezeichne: Eine Menge ist genau dann eine endliche Standardmenge, wenn alle ihre Elemente standard sind.

Das Axiom I wird nun gerade so formuliert, dass aus ihm die beiden vorläufigen Axiome I1 und I2 folgen.

Axiom 2 (Idealisierungsaxiom I, Schema) *Sei $\phi(x, y)$ ein interner Ausdruck mit den freien Variablen x und y (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Dann gilt*

$$\forall^{\mathrm{sm}} A \, (A \text{ endlich } \Rightarrow \exists x \forall y \, (y \in A \Rightarrow \phi(x, y))) \Leftrightarrow \exists x \forall^{\mathrm{s}} y \, \phi(x, y).$$

Umgangssprachlich ausgedrückt heißt das, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für jede endliche Standardmenge A gibt es ein x, das alle $y \in A$ dominiert.
2. Es gibt ein x, das alle standard y dominiert.

Für die meisten Anwendungen von I ist die Richtung von 1. nach 2. relevant. Die umgekehrte Richtung wird zum Beweis des vorläufigen Axioms I2 gebraucht (siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 437).

Einige wichtige Konsequenzen von I sind:

Satz 2 *Es gibt eine endliche Standardmenge, die alle Standardobjekte enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 435.

Satz 3 *Zu jeder Menge A gibt es eine endliche Teilmenge, die alle Standardelemente von A enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 435.

Satz 4 *Jede unendliche Menge enthält Nichtstandardobjekte.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 436.

Insbesondere enthalten die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ Nichtstandardzahlen. Da alle erreichbaren Zahlen in $\mathbb{N}$ nach Axiom T' Standardzahlen sind, enthält $\mathbb{N}$ (metasprachlich) unerreichbare Zahlen, die nicht durch Einsensummenterme darstellbar sind. Dies ist auch in der Standardanalysis nicht ausgeschlossen, nur nicht beweisbar.

Die natürlichen Nichtstandardzahlen sind infinit, ihre Kehrwerte infinitesimal und damit unerreichbar klein. Also enthält $\mathbb{R}$ sowohl infinite, als auch infinitesimale Zahlen.

Eine Charakterisierung der endlichen Standardmengen gibt

Satz 5 *Für alle Mengen A gilt: A ist eine endliche Standardmenge genau dann, wenn alle Elemente von A Standardobjekte sind.*

Beweis. Siehe Landers und Rogge 1994, S. 437.

Das Standardisierungsaxiom S

Nach Axiom T' sind alle klassisch definierbaren Objekte Standardobjekte. Aber das reicht nicht für eine ausreichende Rückkopplung zur Standardtheorie.

So ist zum Beispiel jede definierbare reelle Zahl (etwa π oder e) eine Standardzahl, aber es ist nicht klar, dass jede finite reelle Zahl in infinitesimaler Nachbarschaft einer Standardzahl liegt. Die Existenz eines solchen *Standardteils* für beschränkte reelle Zahlen ist aber entscheidend für die Nützlichkeit von Nichtstandardmethoden in der Analysis.

Ein schweres Handycap scheint auch die Beschränkung des Aussonderungsaxioms auf interne Ausdrücke zu sein. Eine Aussonderung mit externen Prädikaten, wie *standard*, *inifinitesimal* oder *finit*, ist dadurch im Allgemeinen nicht möglich. Wie können also externe Prädikate überhaupt für die Analysis nützlich sein? Hier schafft das Standardisierungsaxiom Abhilfe, welches für interne *und* externe Ausdrücke anwendbar ist.

Axiom 3 (Standardisierungsaxiom S, Schema) *Sei $\phi(x)$ ein (interner oder externer) Ausdruck mit der freien Variablen x (und möglicherweise weiteren freien Variablen). Dann gilt*

$$\forall^{\mathrm{sm}} A\, \exists^{\mathrm{sm}} B\, \forall^{\mathrm{s}} x\, (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))).$$

Umgangssprachlich: Zu jeder Standardmenge A gibt es eine Standardmenge B, deren Standardelemente genau die Standardelemente von A sind, die ϕ erfüllen. Diese Standardmenge ist eindeutig bestimmt und wird mit ${}^{\phi}A$ oder ${}^{\mathrm{s}}\{x \in A \mid \phi(x)\}$ bezeichnet.

Man vergleiche das Standardisierungsaxiom mit dem Aussonderungsaxiom (0.22), welches nur für interne Ausdrücke gilt (hier zur Vereinfachung ohne die optionalen Parameter wiederholt):

$$\forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))).$$

Der Aufbau ist vollkommen identisch, mit der Ausnahme, dass die Quantoren in S nur über Standardobjekte laufen.

Es ist wichtig zu beachten, dass Axiom S nur Aussagen über Standardelemente macht: Die Standardelemente von ${}^{\phi}A$ sind genau die Standardelemente von A, die ϕ erfüllen. Es kann also Nichtstandardelemente von ${}^{\phi}A$ geben, die ϕ nicht erfüllen, ebenso wie Nichtstandardelemente, die ϕ erfüllen, aber nicht in ${}^{\phi}A$ sind.

Hierzu ein einfaches Beispiel: Sei $\phi(x)$ der externe Ausdruck

$$0 < x \wedge \neg x \approx 0 \wedge (x < 1 \vee x \approx 1)$$

und a eine positive infinitesimale Zahl. Dann ist ${}^{\phi}\mathbb{R} =]0,1]$. Die Standardelemente dieser Standardmenge sind genau die Standardzahlen, die ϕ erfüllen. Aber für die Nichtstandardzahl a gilt $a \in {}^{\phi}\mathbb{R}$ trotz $\neg\phi(a)$. Und für die Nichtstandardzahl $1 + a$ gilt $\phi(1 + a)$, aber $1 + a \notin {}^{\phi}\mathbb{R}$.

Einige wichtige Folgerungen aus S sind die folgenden Sätze.

Satz 6 (Standardteil) *Zu jeder finiten reellen Zahl x gibt es genau eine infinitesimal benachbarte reelle Standardzahl y. Formal:*

$$\forall^{\mathrm{r}} x\,(x \textit{ finit } \Rightarrow \exists^{=1\mathrm{sr}} y\, y \approx x)$$

Beweis. Siehe Robert 2011, S. 38.

Die nach Satz 6 eindeutig bestimmte zu x infinitesimal benachbarte Standardzahl y wird *der Standardteil von x* genannt und mit $\mathrm{st}(x)$ bezeichnet.

In den Beweis von Satz 6 geht wesentlich die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein. Ansonsten wird in der IST-Analysis die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eher nicht explizit verwendet, sondern nur noch indirekt über die Verwendung des Standardteils. Die folgenden Regeln für das Rechnen mit Standardteilen können anhand der Definition leicht verifiziert werden.

Satz 7 *Für alle finiten $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.
2. $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.
3. $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$, *falls* $\mathrm{st}(y) \neq 0$.
4. $x \leq y \Rightarrow \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

Satz 8 *Jede Teilmenge A einer Standardmenge hat einen eindeutig bestimmten Standardteil ${}^{\mathrm{s}}A$, das heißt eine Standardmenge, die dieselben Standardelemente wie A enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 438.

Das weitere Programm der Analysis kann nun ohne Grenzwertformalismus entwickelt werden, zum Beispiel

- Definition der Stetigkeit als infinitesimale Änderung des Funktionswerts bei infinitesimaler Änderung des Arguments,
- Definition der Ableitung als Standardteil des Differentialquotienten (also des Differenzenquotienten bei infinitesimaler Änderung des Arguments),
- Definition des Integrals als Standardteil der Riemann'schen Summen zu infinitesimalen Unterteilungen.

Diese Definitionen gelten zunächst für Standardfunktionen und -zahlen und implizit (per Standardisierung) dann allgemein. Weitere Ausführungen findet man zum Beispiel in Robert 2011, Nelson 1977 und Deledicq und Diener 1989.

3.3 Zur Widerspruchsfreiheit der IST-Analysis

Nelson hat gezeigt, dass IST widerspruchsfrei ist, sofern ZFC widerspruchsfrei ist.[29] Durch die neuen Axiome I, S und T werden also keine Widersprüche in ZFC hineingetragen. Hieran ändert sich nichts, wenn wir statt ZFC das Axiomensystem der Analysis zugrunde legen. Genauer gesagt, ist die IST-Analysis relativ konsistent zu IST und damit auch zu ZFC. Die über die Symbolmenge $\{\in, \mathrm{s}\}$ von IST hinausgehenden Symbole der IST-Analysis können wie üblich definiert werden. Die Axiome aus den Abschnitten 2.6 und 3.2 sind dann in IST beweisbare Sätze und man erhält zu jedem Modell von IST ein Modell der IST-Analysis.

4 Fazit

Welche Konsequenzen können aus den bisherigen Betrachtungen gezogen werden? Ich gehe kurz auf systematische und didaktische Aspekte ein.

4.1 Systematik

Ausgangspunkt der Kritik in diesem Aufsatz war die mangelnde Unterscheidung von Metasprache und Objektsprache in Analysis-Einführungen und die daraus resultierende ungerechtfertigte Gleichsetzung der natürlichen Zahlen mit den Einsensummen.

29. Siehe Nelson 1977

Inwieweit ist hiervon die praktische Analysis in Forschung und Lehre betroffen? Zunächst einmal überhaupt nicht. Die Theorie funktioniert trotz dieser nicht sauberen Trennung der Sprachebenen. Sie funktioniert deswegen, weil wir beim Beweisen von Theoremen axiomatisch arbeiten und die theoretischen (also objektsprachlichen) natürlichen Zahlen und das theoretische „endlich“ verwenden, obwohl viele dabei eher an die metasprachlichen natürlichen Zahlen und das metasprachliche „endlich“ denken dürften. Wer verspürt schon die Notwendigkeit zu beweisen, dass die Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist?

Der Punkt ist, dass die Vermischung der Sprachebenen das „Nichtstandard-Denken“, wie es vielleicht der Intuition eines Leibniz und anderer Analysis-Pioniere zu Grunde lag, behindert. Wir berauben uns so der Möglichkeit, unerreichbare Zahlen in unserer Standard-Theorie zu *denken*. Dabei sind sie (potentiell) vorhanden. Wir müssen sie nicht erst umständlich (zum Beispiel als hyperreelle Zahlen) dazukonstruieren.

Es ist eine Frage des Wollens. Will man metasprachlich unerreichbare Zahlen in der Theorie haben, so kann man sie durch eine Erweiterung der Sprache und der Axiomatik bekommen. Es wird dann eine Nichtstandard-Analysis mit infiniten und infinitesimalen Zahlen möglich.[30]

Will man lediglich Standard-Analysis betreiben und es im Ungewissen lassen, ob es metasprachlich unerreichbare Zahlen in der Theorie gibt, so kann man bei der Standard-Axiomatik bleiben. Ausgeschlossen sind unerreichbare Zahlen damit nicht. Sie reisen quasi immer als mögliche „blinde Passagiere“ in der Theorie mit. In einer modelltheoretischen Argumentation ist dies eine Konsequenz aus dem Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski, wonach eine Ausdrucksmenge, die über einem unendlichen Träger erfüllbar ist, stets verschiedene Modelle hat, und zwar beliebiger Kardinalität (größer als die Kardinalität der Ausdrucksmenge).

4.2 Didaktik

Über den Nutzen von Nichtstandard-Methoden im Analysis-Unterricht (zur Vermeidung schwer verdaulicher Grenzwerte) werden unterschiedliche Ansichten vertreten.[31] In der Hochschul-Analysis wird man Grenzwerte schon aufgrund ihrer zentralen Bedeutung für die aktuelle Standard-Analysis behandeln müssen. Das bedeutet jedoch nicht, dass man deswegen Nichtstandard-Methoden komplett ausklammern muss. In Veranstaltungen zur Geschichte oder Philosophie der Mathematik hat Infinitesimalmathematik ohnehin ihren Platz, aber kann sie darüber hinaus heute noch etwas zum *Verstehen* der Analysis beitragen?

30. Einen Überblick, wie Nichtstandard (auf der Basis von IST) in der aktuellen mathematischen Praxis eingesetzt wird, gibt z. B. Diener und Diener 1995.

31. Siehe z. B. Baumann und Kirski 2016, Baumann und Kirski 2017, Bedürftig 2018, Hischer 2017.

Behrends, der die Rolle der Nichtstandard-Analysis eher skeptisch beurteilt, räumt immerhin ein:

> Es gibt einen aus der Modelltheorie entstandenen und vor einigen Jahrzehnten viel diskutierten alternativen Zugang zur Analysis, in dem die „unendlich kleinen Größen“ ein Comeback erleben (die *Nonstandard-Analysis*). Hauptvorteil ist, dass man endlich „versteht“, was LEIBNIZ und den anderen wohl vorgeschwebt haben könnte, außerdem kommt man viel schneller zu den Hauptsätzen der Analysis.

Gleich danach schränkt er aber ein:

> Dabei muss man sich allerdings, wenn man alles so streng wie allgemein üblich entwickeln möchte, sehr ausführlich mit sehr verzwickten Teilen der Modelltheorie beschäftigen, und deswegen spricht einiges dafür, dass diese Variante der Analysis nur eine Episode bleiben wird.[32]

Hierzu ist anzumerken, dass die modelltheoretische Konstruktion von Nichtstandard-Erweiterungen zwar vergleichsweise kompliziert ist, aber nicht unbedingt benötigt wird, um nonstandard *in* Modellen zu arbeiten. Dies gilt insbesondere für die Schule und die Anfängervorlesungen, wo man darauf vertraut, dass geeignete Modelle existieren (so wie man es auch bezüglich der reellen Zahlen tut).[33]

Der hier vorgestellte, an IST anknüpfende Zugang kommt gänzlich ohne komplizierte modelltheoretische Konstruktionen aus und bietet zugleich interessante Ansatzpunkte für eine Diskussion mathematischer Grundlagen und des Selbstverständnisses der Mathematik. Er erscheint mir daher zumindest als Inhalt vorlesungsbegleitender oder -ergänzender Veranstaltungen zur Analysis einer Erwägung wert.[34]

In den Standard-Vorlesungen würde eine (gegenüber Nichtstandard-Methoden) unvoreingenommene Sichtweise durch die Beachtung der folgenden Punkte begünstigt:

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Unterscheidung von Sprachebenen und die Unterscheidung von metasprachlichen und objektsprachlichen natürlichen Zahlen.

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Verwendung mengentheoretischer Axiome (die, sofern nicht explizit als Axiome formuliert, zumindest als bewusste zusätzliche Vereinbarungen wahrgenommen werden könnten).

32. Siehe Behrends 2015, S. 76.
33. Siehe z. B. Bedürftig und Murawski 2015, Abschnitt A.5
34. Ein Beispiel für eine vorlesungsbegleitende Veranstaltung auf der Basis von IST ist Deledicq und Diener 1989.

- Die Wahrung der Option auf unerreichbare Zahlen durch präzise Formulierung: Jede Einsensumme ist eine natürliche Zahl, die Umkehrung bleibt offen.
- Einstieg und Experimente mit Grenzwerten *und* Nichtstandard-Elementen und -Methoden in Anfängervorlesungen ohne formalen Aufwand.

Die Einbeziehung „infinitesimaler" Betrachtungen neben dem Grenzwertformalismus dient nicht nur der kritischen Würdigung der historischen Wurzeln der Analysis, sondern auch dem intuitiven Verständnis für Begriffsbildungen und Beweisideen. Die hier durchgeführte Analyse zeigt, dass dies gefahrlos möglich ist, denn Infinites und Infinitesimales ist ja potentiell vorhanden.

4.3 Schluss

Abschnitt 3 ist überschrieben mit „Eine Chance für Nichtstandard" (die sich aus der vorangegangenen Analyse in Abschnitt 2 ergeben hat). Für Forschung und Lehre wird daraus eine Chance *durch* Nichtstandard – eine Chance, die wir nutzen sollten.

Literaturverzeichnis

Baumann, Peter, und Thomas Kirski. 2016. Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 100:6–16.

———. 2017. Analysis ohne Grenzwert! *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 102:15–16.

Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Mathematische Semesterberichte* 65 (2): 277–298.

Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2012. *Philosophie der Mathematik.* 2. Aufl. Berlin Boston: de Gruyter.

———. 2015. *Philosophie der Mathematik.* 3. Aufl. Berlin Boston: de Gruyter.

Behrends, Erhard. 2015. *Analysis Band 1.* Springer Spektrum.

Deitmar, Anton. 2014. *Analysis.* Springer Spektrum.

Deledicq, André, und Marc Diener. 1989. *Leçons de calcul infinitésimal.* Armand Colin (Paris).

Diener, Francine, und Marc Diener, Hrsg. 1995. *Nonstandard Analysis in Practice.* Springer.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2003. *Einführung in die Mengenlehre.* Spektrum Akademischer Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, u. a. 1992. *Zahlen.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. 2007. *Einführung in die mathematische Logik.* 5. Aufl. Springer-Verlag.

Forster, Otto. 2015. *Analysis 1.* 12. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gödel, Kurt. 1944. Russell's mathematical logic. *1944:* 123–153.

Grieser, Daniel. 2014. *Analysis I.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heuser, Harro. 2009. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Hilbert, David. 1900. Über den Zahlbegriff. *Jahresberichte der DMV* 8.

Hischer, Horst. 2017. „Grenzwertfreie Analysis" in der Schule via „Nonstandard Ana1ysis"? *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 103:31–36.

Kanovei, Vladimir, und Michael Reeken. 2004. *Nonstandard Analysis: Axiomatically.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Königsberger, Konrad. 2004. *Analysis 1.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Landers, Dieter, und Lothar Rogge. 1994. *Nichtstandard Analysis.* Berlin Heidelberg: Springer.

Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bull. of the American Mathematical Society* 83 (6): 1165–1198.

Robert, Alain M. 2011. *Nonstandard Analysis.* Dover Publications.

Schilpp, Paul Arthur. 1944. *The philosophy of Bertrand Russell.* Evanstown: Northwestern University.

Tarski, Alfred. 1937. *Einführung in die mathematische Logik und die Methodologie der Mathematik.* Wien: Julius Springer.