GYMNASIUM AM KAISERDOM

Analysis mit hyperreellen Zahlen

Unterrichtspraktische Erfahrungen
aus einem Leistungskurs Mathematik

GYMNASIUM AM KAISERDOM

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

GYMNASIUM AM KAISERDOM

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

Propädeutischer Grenzwertbegriff

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012), Seite 18:

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der **Analysis** und die **Lineare Algebra.**

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
- ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
- Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
- einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
- mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inversen Matrizen beschreiben (A1)

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus

- Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen (A1)
- Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren (A1)

Lehrplananpassung (Juli 2014), Seite 38:

Grenzwerte

Zeitrichtwert: 18 Unterrichtsstunden*

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Der Lehrplan ermöglicht verschiedene Zugänge zum Grenzwertbegriff:
Der Grenzwertbegriff kann anhand reeller Funktionen ohne vorherige Behandlung von Zahlenfolgen erarbeitet werden. Bei diesem Vorgehen wird der Folgengrenzwert zu einem späteren Zeitpunkt in einem geeigneten Zusammenhang, z.B. bei der Betrachtung des Grenzwerts für $x \to x_o$, angesprochen, damit er für Anwendungen und zum weiteren Aufbau der Analysis (etwa für die Einführung der Integralrechnung) zur Verfügung steht.

Propädeutischer Grenzwertbegriff

Lehrplananpassung (Juli 2014), Seite 39:

Ein anderer Weg über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse können historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden. Es bieten sich aber auch Beispiele aus der fraktalen Geometrie (Kochkurve, Sierpinsky-Dreieck,...) an.

Propädeutischer Grenzwertbegriff

- Einführung des Grenzwertbegriffs ohne vorherige Thematisierung von Folgen
- Verwendung eines „intuitiven“ Grenzwertbegriffs, gestützt auf graphische und numerische Erfahrungen
- Statt mit dem trockenen Thema Folgen zu beginnen wird direkt der Ableitungsbegriff als Kernpunkt der Analysis angesteuert
- Das *universitätspropädeutisch* ausgesprochen ergiebige Thema wird an anderer Stelle behandelt (**Achtung! Pflichtthema des Lehrplans für den LK**)

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

Vorbemerkungen

- Einstieg in die Differential- und Integralrechnung ohne Thematisierung von Folgen
- Motivation der Zahlbereichserweiterung durch graphische und numerische Erfahrungen
- Mit dem „hyperreellen Rüstzeug“ kann dann sehr schnell und trotzdem fundiert der Ableitungsbegriff erworben werden
- Das *universitätspropädeutisch* ausgesprochen ergiebige Thema wird an anderer Stelle behandelt (Achtung! Pflichtthema des Lehrplans)

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

Stundenbeginn der ersten Stunde im LK 11 M:

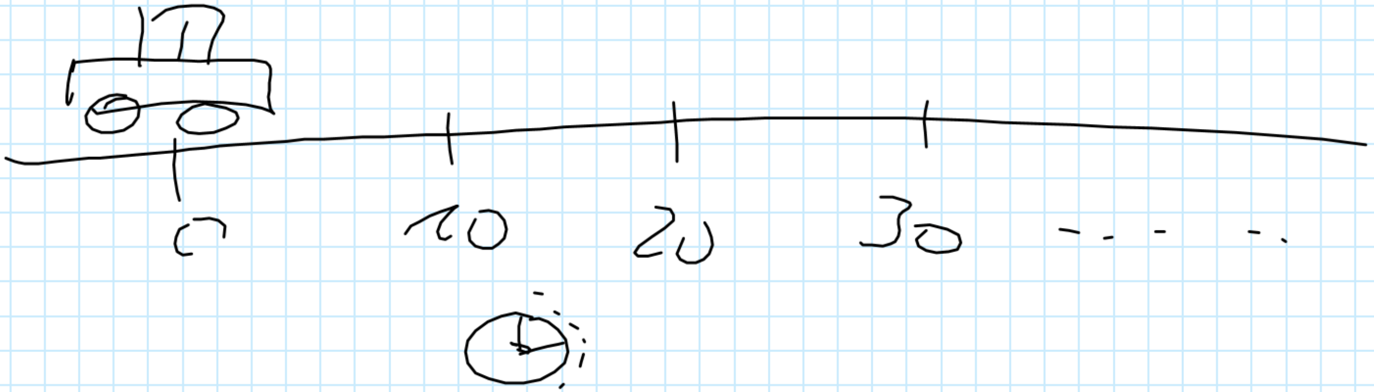
Beschleunigungsmessung Porsche 911

zurückgelegte Strecke (in m)	10	20	30	50	100	150	200	250	300
Zeit (in s)	1,81	2,56	3,15	4,05	5,73	7,01	8,09	9,05	9,92

Beschleunigungsmessung Porsche 911

Wg. Startgeschw. 0

zurückgelegte Strecke (in m)	0	10	20	30	50	100	150	200	250	300
Zeit (in s)	0	1,81	2,56	3,15	4,05	5,73	7,01	8,09	9,05	9,92



Wie lang, um von 0 auf 100 $\frac{km}{h}$ zu kommen?

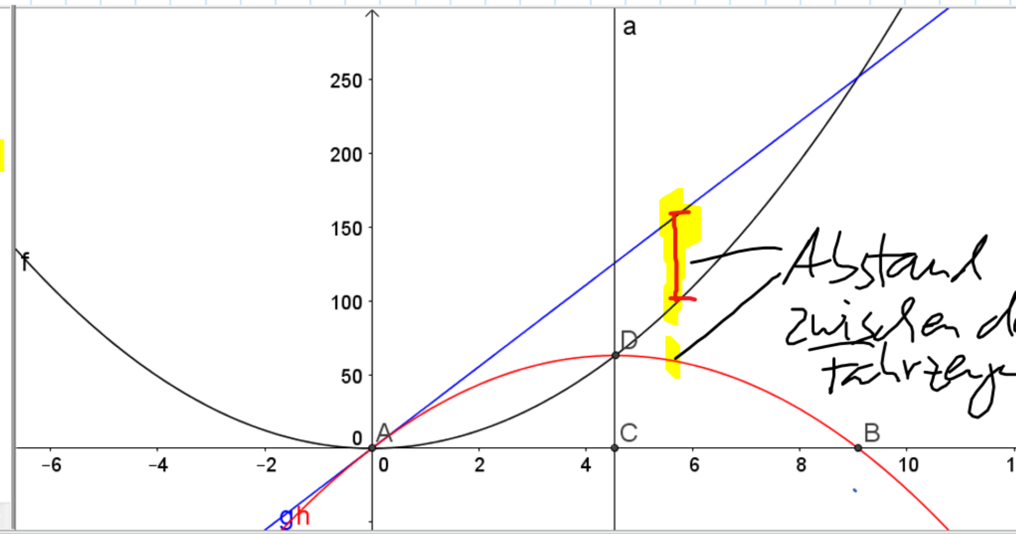
→ $t = 0$ ⟹ Geschw. $V = 0$?!

$$\frac{y}{x} = 27{,}7 = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}$$

Funktion
- $f(x) = 3.05\,x^2 - 0.02\,x$
- $g(x) = 27.7\,x$
- $h(x) = 27.7\,x - (3.05\,x^2 - 0.02\,x)$

Gerade
- a: $x = 4.54$

Punkt
- A = (0, 0)
- B = (9.09, 0)
- C = (4.54, 0)
- D = (4.55, 62.98)



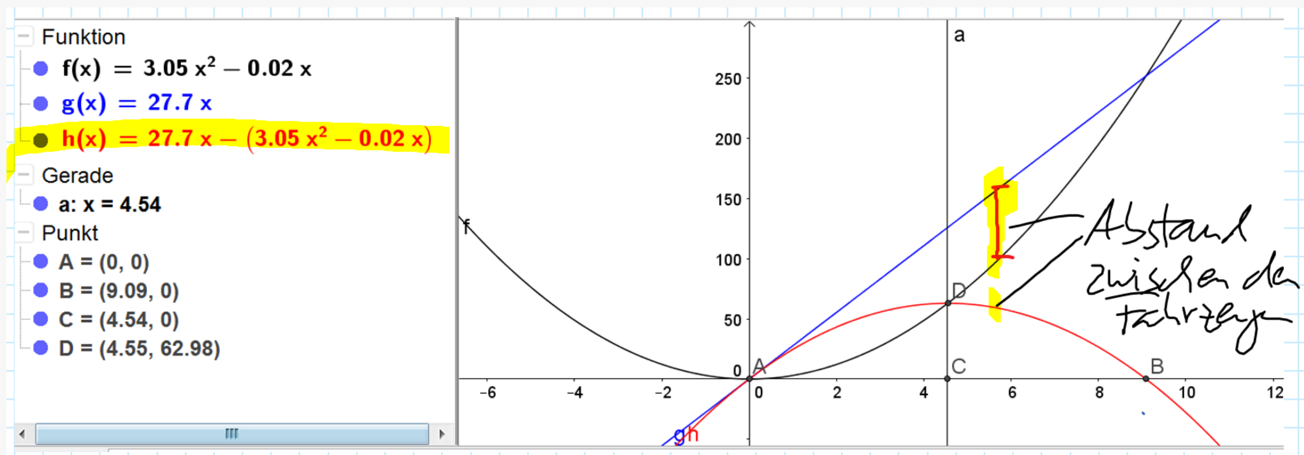
Abstand zwischen den Fahrzeugen

h(x) Abstand zwischen dem beschleunigenden Fahrzeug (f(x)) und einem Fahrzeug, das sich mit konstant $100\,\frac{km}{h} = 27{,}7\,\frac{m}{s}$ bewegt (g(x))

mit konstant 100 $\frac{km}{h}$ = 27,7 $\frac{m}{s}$
bewegt (g(x))

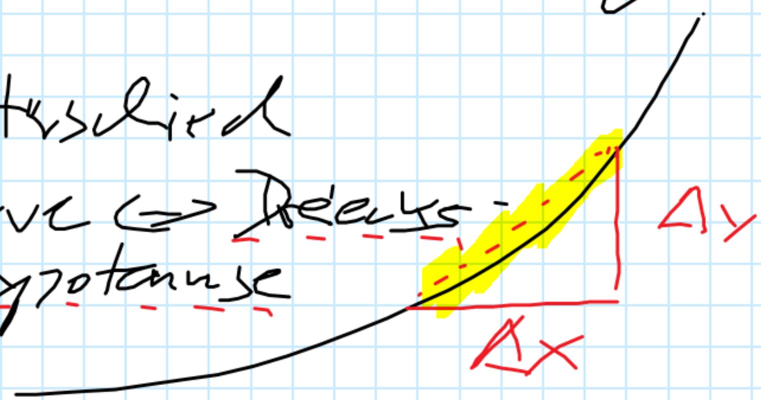
↳ Wir suchen den Zeitpunkt, an dem der Abstand maximal wird (da haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit)

↳ d.h. wir suchen den Hochpunkt (Scheitelpunkt) der Parabel h.



Zusammenfassung:

Unterschied
Kurve $\Leftrightarrow$ Dreiecks-
hypotenuse



Verfahren zur
näherungsweisen
Bestimmung
von Steigungen
(bei gekrümmten Linien)

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit kleinem Δx
(wg. des Fehlers)

Einstiegsaufgabe - Barringer Krater

In Arizona gibt es einen Einschlagskrater eines Meteoriten, den sogenannten Barringer-Krater. Der Krater hat einen Durchmesser von bis zu 1200 Meter und eine Tiefe von 180 Meter. An einer sehr flachen Stelle kann der Teilquerschnitt des Kraters bis zum Kraterrand durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$k(x) = 0{,}002x^2 \text{ für } 0 \leq x \leq 300$$

Im Krater befindet sich ein Fahrzeug, das eine Steigung von bis zu 115% bewältigen kann. Kann das Fahrzeug den Kraterrand erreichen und aus dem Krater herausfahren?

Einstiegsaufgabe - Füllkurve

Unterschiedliche Gefäßformen lassen sich durch ihren Füllgraphen beschreiben. Dieser ergibt sich, wenn in ein Gefäß eine Flüssigkeit mit gleichmäßigem Zufluss einfließt. Die entstehende Zuordnung

$$Zeit(t) \rightarrow Höhe(h)$$

kann in ein Koordinatensystem übertragen werden und stellt die Zunahme des Wasserspiegels in Abhängigkeit der Zeit dar.

a) Skizzieren Sie zunächst einen möglichen Verlauf des Füllgraphen für die Gefäße in ein geeignetes Koordinatensystem. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit einer anderen Gruppe und begründen ihre Skizze.

Experiment
Mit dem folgenden Experiment können Sie ihre Vermutung aus der ersten Aufgabe überprüfen. Dazu sollen Sie gleichmäßig Wasser in ein Gefäß füllen. Mit einer Stoppuhr wird die Zeit gemessen, wie lange der Wasserspiegel braucht um auf 0.5 cm, 1 cm, 1.5 cm, 2cm usw. zu steigen. Die Messdaten für die Zeit übertragen Sie danach vom Arbeitsblatt in die untenstehende Tabelle

Benötigte Materialien:
- Messbecher
- Einfülltrichter
- Höhenskala
- Stoppuhr (z.B. App im Smartphone)
- leere Plastikflasche 500ml zum Füllen des Trichters

Ziel: · Änderungsrate / mittlere Änderungsrate bestimmen
· oder Steigung bestimmen

dazu $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

als "Näherungswert"

besserer Näherung für Δx klein

Δx soll möglichst klein werden

$\boxed{\Delta x \text{ soll unendlich klein werden}}$

Δx quasi Null ?

$\Delta x \longrightarrow dx$ (differentiell klein)

Zahlbereichserweiterung

Donnerstag, 24. September 2015 08:59

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(Bruchzahlen $\mathbb{B} = \{ \frac{z}{n}, z \text{ und } n \in \mathbb{N}_0, n \neq 0 \}$)

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{ \frac{z}{n}, z \text{ und } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

reelle Zahlen $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q}$ und "spezielle Zahlen" π, und Wurzeln ...

unendlich viele Nachkommastellen, nicht periodisch

Problem 1

$x^2 + 1 = 0$

↪ Wurzel aus negativer Zahl?

Problem 2

unendlich kleine Zahl
unendlich große Zahl

Infinitesimale Zahlen

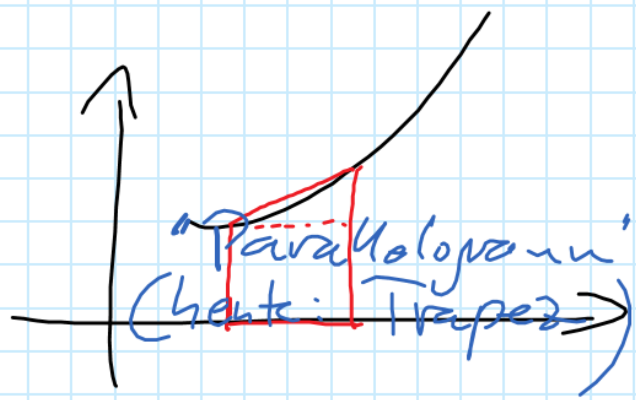
Freitag, 25. September 2015 08:20

Postulate.

1. Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.
2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind.
3. Eine Figur, die zwischen zwei Ordinaten, der Differenz derAbszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve enthalten ist, wird als Parallelogramm betrachtet [12].

Bernoulli:

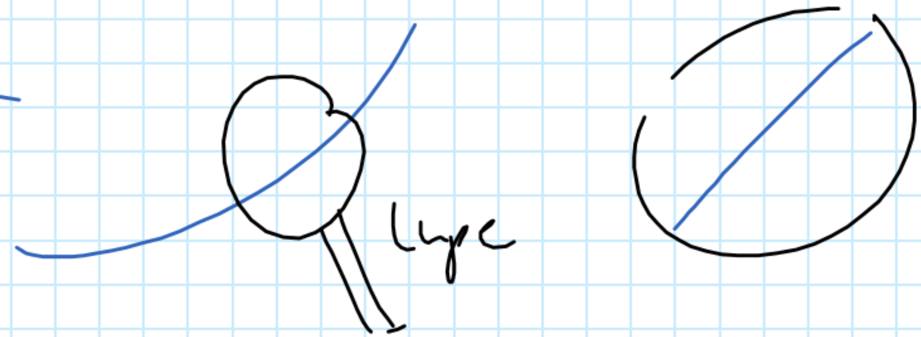
Postulat 3



w.v.:

Dreieck
(rechtwinklig)

Postulat 2:



Postulat 1:

Problem:

Ein unendlich kleines Teilstück verändert eine Größe nicht,
ABER eine Linie besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen Teilstücken → Die dürfte nicht existiere ?

Fragen:

Freitag, 25. September 2015 08:59

dx ist unendlich klein, aber $\gneqq 0$

a eine Zahl

$\underbrace{dx + dx + dx + \ldots}_{a \text{ mal}}$ = sollte etwas reelles rauskommen?

a ist eine sehr kleine Zahl

$\underbrace{a + a + a + \ldots}_{\text{unendlich mal}}$ = unendlich

Gibt es unendlich große Zahlen?

unendlich + unendlich

= 2 · unendlich = ?

→ Gibt es verschiedene „unendlich" ?

z.B. $[0; 1]$ unendlich viele Zahlen

$[0; 2]$ („doppelt so viele" ?)

$\frac{1}{\infty} \cdot \infty \overset{?}{=} 1$

$$\frac{1}{\infty} \cdot \infty \stackrel{?}{=} 1$$

$$0 = 1 - 1 = (1-1) + (1-1) = \underbrace{(1-1) + (1-1) + \ldots}_{\text{unendlich oft}}$$

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$? \quad 0 = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$= 1 + \infty \cdot 0 = 1$$

? Die Eins, die irgendwo übrig ist?

$$\underbrace{? - \infty}_{= \infty} = \int \text{~~egale~~} ?$$

$$0,\overline{9} = 0,999999\ldots \stackrel{?}{=} 1$$

Arithmetik

Dienstag, 29. September 2015 08:14

„dx ist eine unendlich kleine Zahl"

mathematische Definition:

$(dx \neq 0 \; ; \; dx > 0)$

$\| dx < r$ für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0 \|$

$\Leftrightarrow$ dx ist eine infinitesimale Zahl

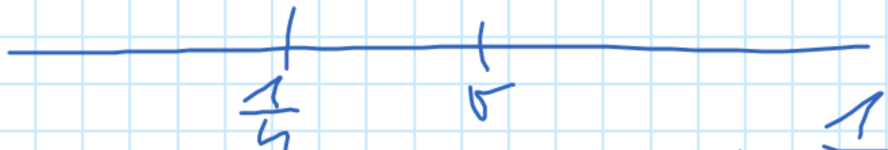
1 2

alternative Definition:

$dx < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

① $\frac{1}{4}$ ist immer eine reelle Zahl !?

② nicht alle $r \in \mathbb{R}$ lassen sich als Bruch oder sogar als Stammbruch schreiben !?



ABER: Es gibt n mit $\frac{1}{n} < r$!?

D.h. beide Definitionen sind gleichwertig !?

HA: dx ist unendlich klein

a ist reelle Zahl

Ist $a \cdot dx$ reell oder nicht?

a steht für alle reelle Zahl, also fast immer $a \neq 0$

$$a \cdot dx = a \cdot (0 + dx)$$

$$= 0 \quad \text{reell}$$

$$a \cdot dx = \underbrace{dx + dx + dx}_{a\text{ mal}} \ldots = dx \quad \text{infinitesimal}$$

Ist $a \cdot dx$ reell oder nicht?

a steht für alle reellen Zahlen, also fest immer $a \neq 0$

1. Variante

$0 \neq a \cdot dx = a \cdot (\overset{\approx 0}{0 + dx})$
$\approx a \cdot 0$
$= 0$ ~~reell~~ infinitesimal

Definition
$\approx$ bedeutet, dass nur die reellen Anteile berücksichtigt werden,
z.B. $dx \approx 0$

2. Variante

$a \cdot dx = \underbrace{dx + dx + dx \ldots}_{a \text{ mal}} = dx$ infinitesimal

ggf. die nächstgrößere natürliche Zahl, wenn $a \notin \mathbb{N}$

Problem, wenn $a \notin \mathbb{N}$, z.B. $a = 10{,}4$

3. Variante

dx ist infinitesimal, d.h.

$dx < r$ $\quad r \in \mathbb{R}, r > 0$, r beliebig

$dx < \frac{r}{a}$ $\quad | \cdot a$

$a \cdot dx < r$

$\to a > 0$ und $\frac{r}{a} \in \mathbb{R}$ und damit auch beliebig gewählt

q.e.d.

Arithmetik II

Mittwoch, 30. September 2015 11:07

von letzte Seite:

$\approx$: Vernachlässigung der infinitesimalen Teile ("ungefähr"); für $dx \neq 0$ gilt:

dx infinitesimal $\Leftrightarrow$ $dx \approx 0$

$dx + dx = 2 \cdot dx$ ist infinitesimal

Division: (1) $\frac{dx}{dx} = 1$

Definition eine unendlich große Zahl ← (2) $\frac{a}{dx}$ ergibt eine unendlich große Zahl!

$\frac{a}{dx} = \underline{\underline{\Omega}}$

(3) $\frac{dy}{dx}$

(4) $\frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \cdot dx \neq 0$

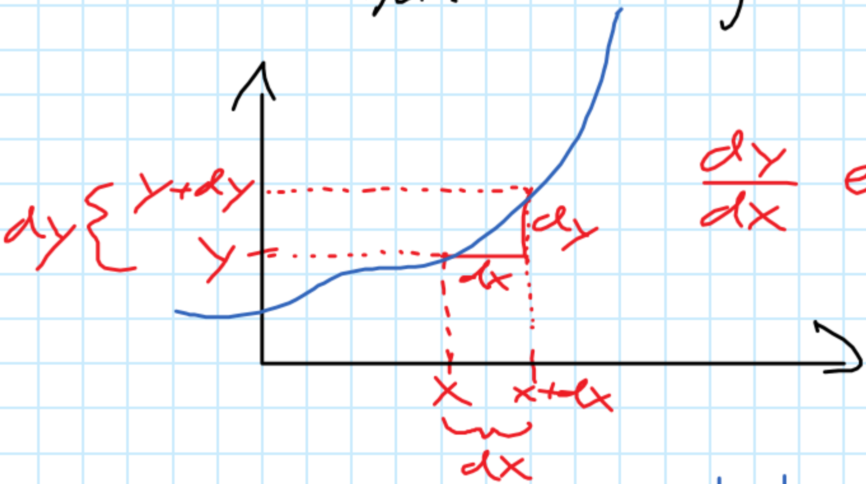
Fall ③:

1. Möglichkeit $\frac{dy}{dx} = \Omega$ unendlich groß

„wenn dx quasi unendlich kleiner ist als dy"

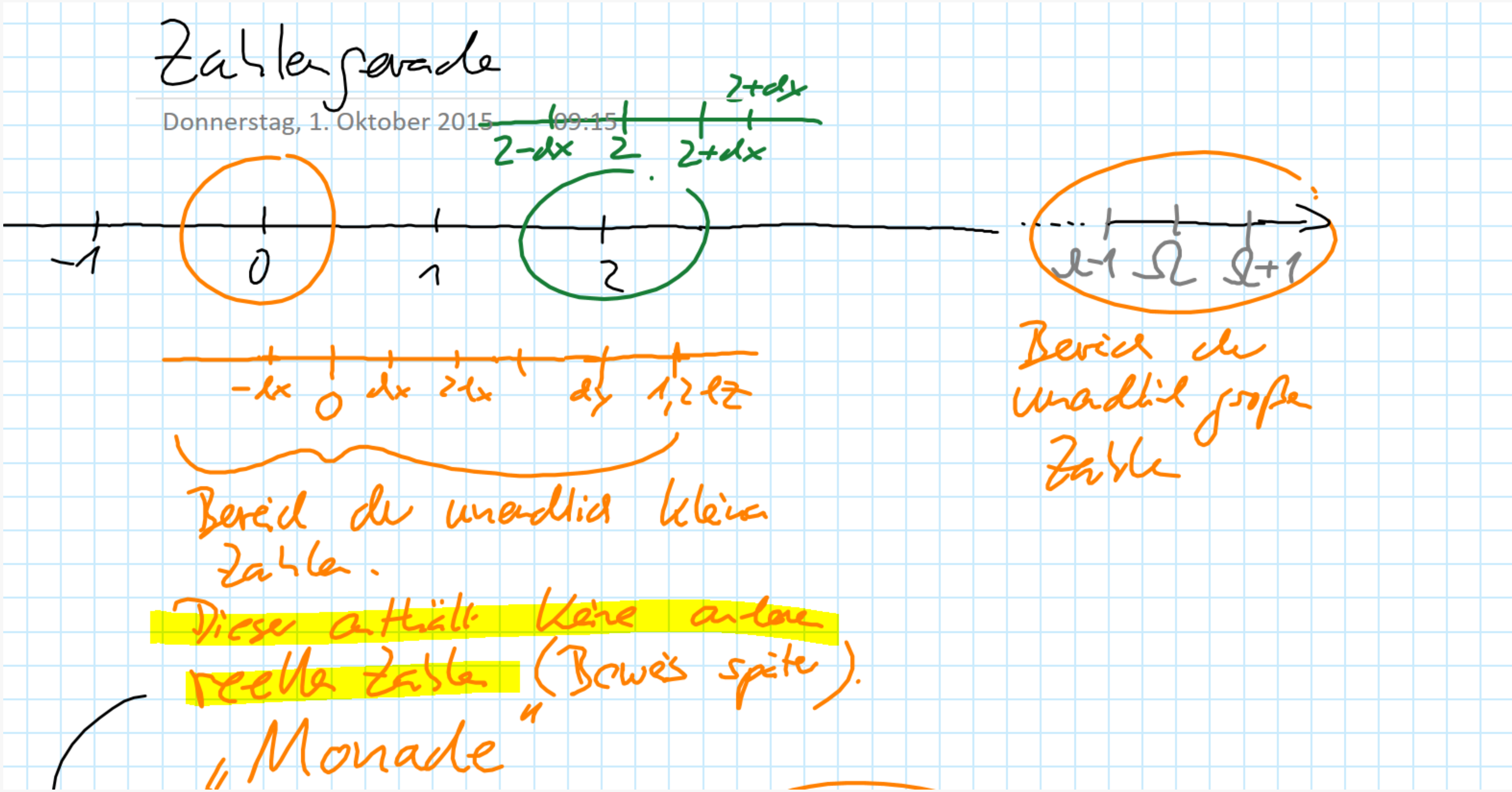
2. Möglichkeit $\frac{dy}{dx} = a$ also reell

„wenn dy und dx vielleicht nahe beieinander liegen"



$\frac{dy}{dx}$ ergibt einen endlichen Wert

„Die Funktion verhält sich gutartig"

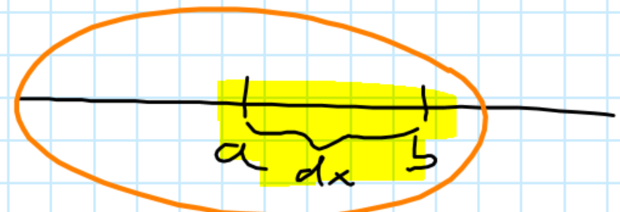

Zahlengerade
Donnerstag, 1. Oktober 2015 09:15
2+dx
2-dx
2
2+dx
-1
0
1
2
Ω-1
Ω
Ω+1
Bereich der unendlich großen Zahl
-dx
0
dx
2dx
dx
1,2 etc
Bereich der unendlich kleinen Zahlen.
Diese enthält keine andere reelle Zahl (Beweis später).
„Monade“

„Monade"

Beweis:

Keine Überlappung für $a, b \in \mathbb{R}$

Gegenannahme:
In der 'Monade' um a ist noch eine weitere reelle Zahl b,
Also $a + dx = b$



1.) Nach 1. Postulat gilt $a + dx \approx a$
$\Rightarrow a = b$

2.) $0 \approx \underbrace{dx}_{\text{infinitesimal}} = \underbrace{b - a}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \underbrace{b - a}_{\in \mathbb{R}} \approx 0$
$\Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow a = b$

Steigung an einer Stelle

Ziel: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Näherung „genauer" machen

„einfaches" Bsp.: $f(x) = x^2$

Wie groß ist die Steigung bei $x = 2$?

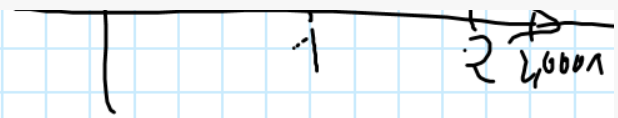
Ergebnisse: 3 ; 3,9 ; 4,01 ; 3,999 ; 1,999 ?

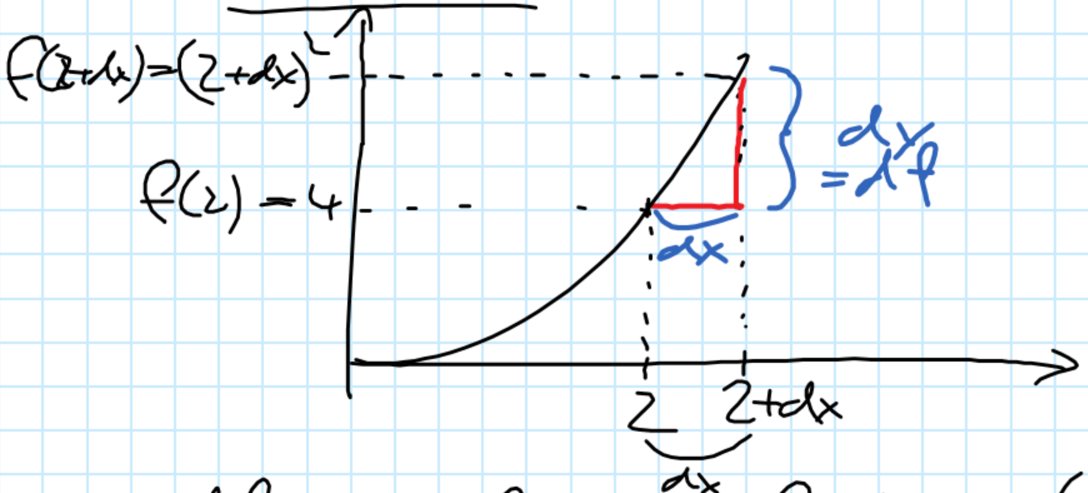
Ansatz: $$\frac{f(2) - f(2-0{,}1)}{2-(2-0{,}1)} = \frac{2^2 - 1{,}9^2}{0{,}1} = 3{,}9$$

oder analog: $$\frac{2^2 - 1{,}999^2}{0{,}001} = 3{,}999$$

oder $$\frac{f(2+0{,}01) - f(2)}{0{,}01} = 4{,}01$$

exakt:





$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} = \frac{(2+dx)^2-2^2}{dx}$$

$$= \frac{4+4dx+dx^2-4}{dx} = \frac{4dx+dx^2}{dx}$$

$$= \frac{dx\,(4+dx)}{dx} = 4+dx \approx \underline{\underline{4}}$$

nur noch der
reelle Teil

Faktorregel

$$f(x) = 3x^2$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3(x+dx)^2 - 3x^2}{dx}$$

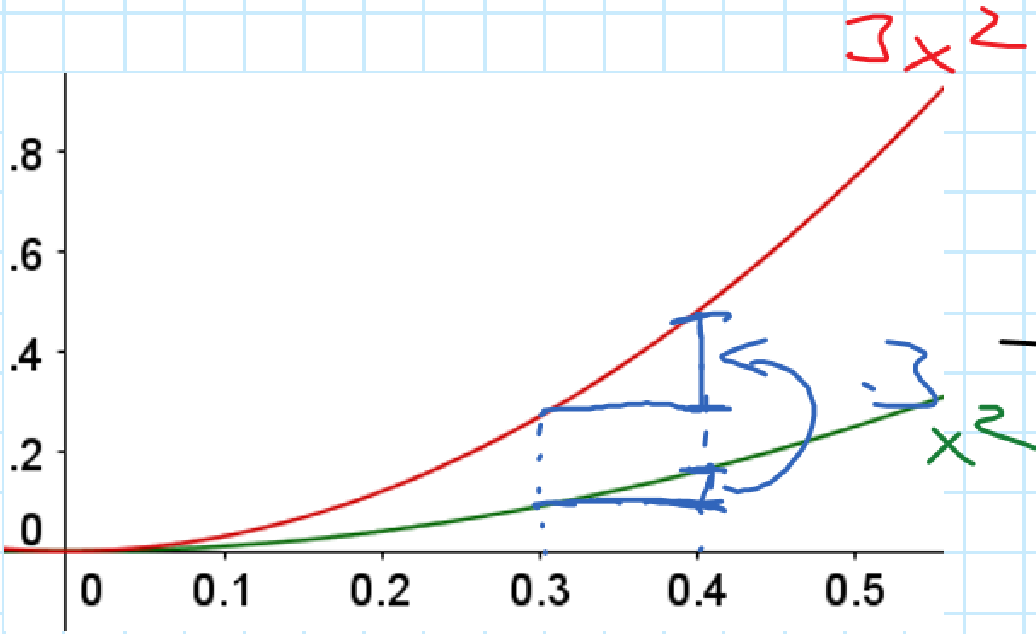
$$= \frac{3(x^2 + 2x\,dx + dx^2) - 3x^2}{dx}$$

$$= \frac{3 \cdot 2x\,dx + 3\,dx^2}{dx} = 3 \cdot 2x + 3\,dx$$

$$\approx 3 \cdot 2x = 6x = f'(x)$$

$$f(x) = a \cdot g(x) \longrightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$$

z.B. $f(x) = 3 \cdot x^2 \longrightarrow f'(x) = 3 \cdot \underbrace{2x}_{\text{Ableitung von } x^2}$



→ d.h. Steigung ist dreimal so groß

Potenzregel

$$f(x) = x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x_0 + dx)^3 - x_0^3}{dx} = \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 dx + 3x_0 dx^2 + dx^3 - \cancel{x_0^3}}{dx}$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0 dx + dx^2$$

$$\approx 3x_0^2$$

allg. x^n

$$(x+dx)^n = (x+dx)(x+dx)\cdot \ldots \cdot (x+dx)$$

$$= x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} dx^1 + (?)\, x^{n-2} dx^2 + \ldots$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} dx + (?)\, x_0^{n-2} dx^2 + \ldots + dx^n - x_0^n}{dx}$$

$$= n x_0^{n-1} + \underbrace{x_0^{n-2} dx + \ldots + dx^{n-1}}_{\text{überall } dx \text{ als Faktor enthalten! d.h. } \approx 0}$$

$$\approx n x_0^{n-1}$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Differentialquotient und Ableitung

a) Erläutern Sie kurz Bedeutung des Differentialquotienten $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$.
Verwenden Sie dazu geeignete Skizzen und Fachbegriffe.

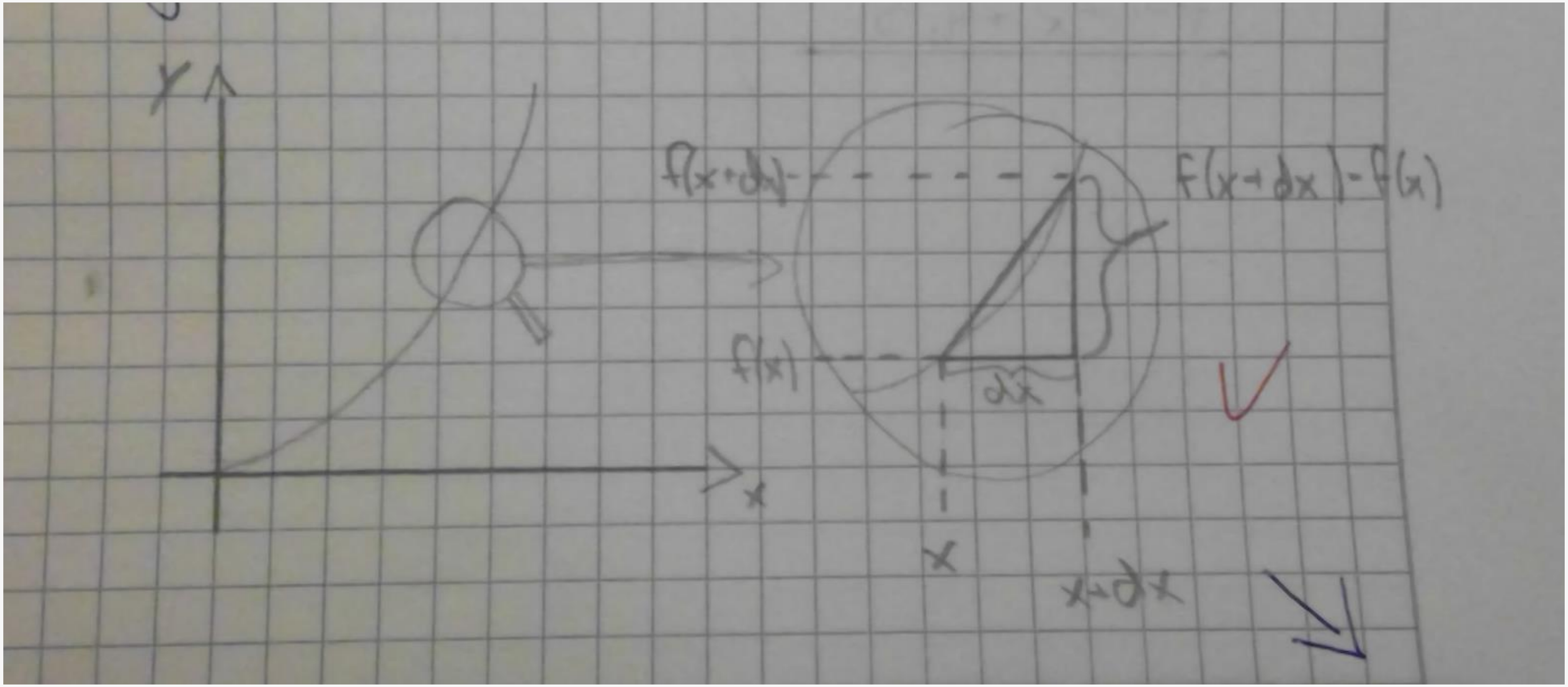
b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitungsfunktion zur Funktion $f(x)=42x^3$.

Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

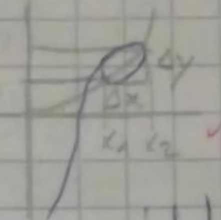
In Material 1 zeigt die erste Reihe die Graphen von vier Funktionen, die zweite Reihe zeigt die Ableitungsgraphen der Funktionen (nicht geordnet).

c) Ordnen Sie begründet den Funktionsgraphen die jeweiligen Ableitungsgraphen zu.

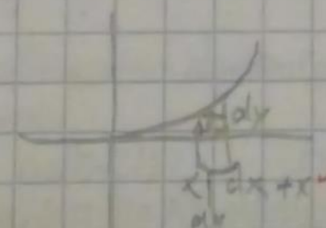
d) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x)=\frac{1}{\;}x^3-2x^2+6x$. Ermitteln Sie mit dem


y
x
f(x+dx)
f(x+dx)-f(x)
f(x)
dx
x
x+dx

Um Steigungen zu ~~bestimmen kann~~ ermitteln, kann man sich Steigungsdreiecke denken.



Teilt man $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (*) kommt man auf die Steigung. Da diese aber in diesem Bereich nicht konstant ist, hat man nur die mittlere Steigung dieses Bereichs. Um ~~A~~ nun die Steigung für exakt einen Punkt zu bestimmen macht man Δx und Δy unendlich klein.
(infinitesimal)



Nun kann man die Steigung berechnen, ~~wa~~ man hat $\frac{\overbrace{f(x+dx)-f(x)}^{\Delta y}}{\underbrace{dx}_{\Delta x}}$.

Dies ist dann die Ableitungsfunktion, die die Steigung an den Punkten angibt.

… und jetzt weiter wie bisher auch …

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

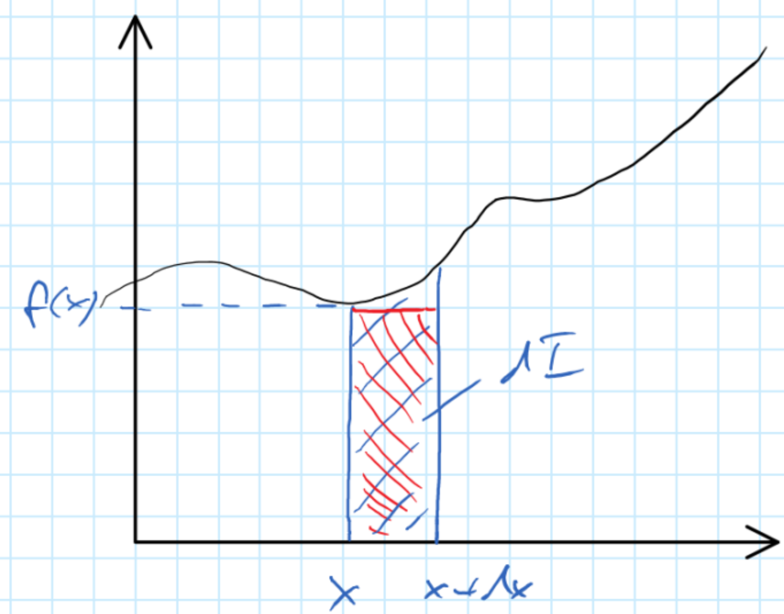
Einführung in die Integralrechnung

- Einführung des Integrals über die Betrachtung von Gesamtänderungen (Produktsummen; als Gesamtbilanzen oder auch Flächenbilanzen) -> Integralfunktionen
- Betrachtung von Problemen / Anwendungsaufgaben, die auf solche Bilanzen führen
- Integrale als Funktionswerte von Integralfunktionen

Aufgabe 4: Was zu beweisen wäre ...

a) Zu einer Funktion f(x) sind zwei Integralfunktionen $I_a(x)$ und $I_b(x)$ angegeben, wobei $a \neq b$ gilt. Zeigen Sie allgemein, dass sich die beiden Integralfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden.

b) Wie auch im Unterricht schon bewiesen gilt für eine Funktion f(x) und eine beliebige zu f(x) gehörige Integralfunktion $I_a(x)$ der Zusammenhang $\left(I_a(x)\right)' = f(x)$.
Erläutern Sie den folgenden Beweis dieses Zusammenhangs (z.B. auch im Vergleich zu dem im Unterricht geführten Beweis):



Da f auf dem Intervall $[x; x+dx]$ näherungsweise konstant ist, gilt:

$$dI \approx f(x) \cdot dx \quad /:dx$$

$$\frac{dI}{dx} \approx f(x)$$

q.e.d.

- Propädeutischer Grenzwertbegriff
- Vorbemerkungen
- Einstieg in die Differentialrechnung und Zahlbereichserweiterung
- Einstieg in die Integralrechnung
- Ausblick

Ausblick

- Gegenüberstellung „Nonstandard <-> Standard“ sollte an zentralen Stellen erfolgen – so wird auch der Grenzwertbegriff thematisiert (LP!)
- Wenn man von den hyperreellen Zahlen kommt, lässt sich die Grenzwertüberlegung leichter erfassen – es werden die Analogien betrachtet.
- Übertragung auf andere Themenbereiche (Grenzmatrizen, stochastische Konvergenz, usw.) klappt ebenso problemlos.

GYMNASIUM AM KAISERDOM

Vielen Dank

für Ihre

Aufmerksamkeit

Jochen Dörr

(Pädagogischen Landesinstitut Rheinland-Pfalz und Gymnasium am Kaiserdom Speyer)

jochen.doerr@pl.rlp.de