Eleonoren-Gymnasium
Worms

Differentialrechnung ohne Grenzwerte

Eine Unterrichtsreihe im Grundkurs
Schuljahr 2018/19
Christine Hahn und Volkhardt Fuhrmann

Überblick über die Unterrichtsreihe

Eleonoren-Gymnasium Worms

Inhalt	Rolle der Infinitesimalien
0,999… - Frage	im Anmarsch… (4h)
Hyperreelle Zahlen: Einführung – Verständnisfragen - Übungen	zentral (7h)
Lineare Funktionen: Differenzenquotient, Steigung	---
Einführung des Ableitungsbegriffs: mittlere Steigung einer Funktion, lokale Steigung einer Funktion	als Kalkül (8h)
Ableitungsfunktion	---
Graphisches Ableiten	---
Elementare Ableitungsregeln erarbeiten	als Kalkül (4h)
Ableitungsregeln anwenden	---
Eigenschaften von Funktionen/ Funktionsuntersuchungen	---
Anwendungen der Differentialrechnung	---

Gründe für die Durchführung der UR in der vorgestellten Form

- Infinitesimalien nicht nur als rechnerisches Kalkül, sondern als Beispiel für unterschiedliche mathematische Theorien, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.
- Nimmt man die berechtigte Kritik an der „Grenzwertmathematik“, dass sie oft ohne ihre eigentliche Grundlage – nämlich die Grenzwerte - unterrichtet wird, ernst, so sollte man auch die „Infinitesimalmathematik“ nicht ohne ihre eigentliche Grundlage – die Infinitesimalien – unterrichten.
- GK oder LK? Gerade der GK erweist sich als günstiger, weil mehr Freiraum vorhanden ist und die SuS unbedarfter sind. Außerdem gibt es im GK keinen zentralen Prüfungsteil, bei dem der fehlende Grenzwertbegriff evtl. problematisch werden könnte.
- Einstieg über die 0,999… – Problematik regt zu Diskussionen an -> Unendlichkeit.
- Teamteaching als Motivation zu Beginn: CH: $0{,}999\ldots = 1$ - VF: $0{,}999\ldots < 1$

0,999... - Frage

Arbeitsblatt

Ist 0,999... kleiner oder gleich 1?

☐ 0,999... = 1 ☐ 0,999... < 1

Begründung:

Schülerantworten

0,999… = 1 (8-mal genannt)

Begründungen:

- Der Unterschied zur 1 ist so gering, dass es keinen Unterschied macht.
- Der Unterschied zwischen 0,999… und 1 ist so klein, dass man behaupten kann: 0,999… = 1.
- Der Unterschied ist so klein, dass es eigentlich nichts ausmacht, auch wenn ich das nicht akzeptieren will.
- 0,999… hat einen so kleinen Unterschied zur 1, dass dieser nicht beachtet werden sollte. Außerdem ist 0,999… auf 1 aufrundbar.
- $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots \quad 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$ bzw. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \quad 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$
- Man müsste $0{,}\overline{0}1$ zu $0{,}\overline{9}$ dazurechnen, aber diese Zahl existiert nicht.

0,999… < 1 (13-mal genannt)

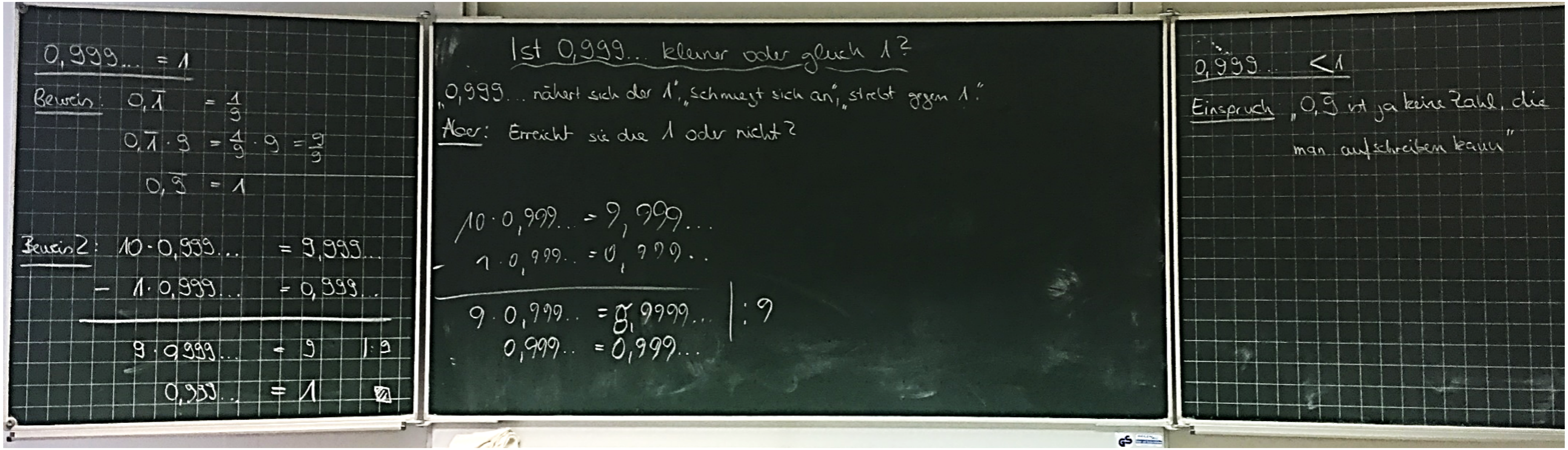
Begründungen:

- Geht zwar sehr weit an die 1, aber nicht genau an dieselbe Stelle.
- Es ist kleiner als 1, weil es sich immer mehr an 1 annähert, aber sie nie erreicht.
- Auch wenn die Nachkommastellen unendlich lang sind, bleibt ein kleiner Unterschied. 0,999… ist kleiner als 1, weil die Zahl immer näher an die 1 geht, aber nie ankommt.
- Es liegt vor 1, zwar minimal, aber es ist $\neq 1$.
- $1=1$ und $0{,}999\ldots \neq 1$. 0,999… ist nicht ganz 1.
- Weil die Zahl wegen 0,… kleiner als 1 ist. Man würde sie zwar normalerweise runden, es heißt aber nicht, dass sie denselben Wert hat – auch wenn der Unterschied minimal ist.

0,999… = 1 <u>und</u> 0,999… < 1 (1-mal genannt)

Begründung:

- Theoretisch gesehen ist es kleiner, da es eine (0,)-Zahl ist. Wenn man aber aufrunden würde, wäre es gleich 1, da 0,9 aufgerundet 1 ist.


0,999... = 1
Beweis: 0,1̄ = 1/9
0,1̄ · 9 = 1/9 · 9 = 9/9
0,9̄ = 1
Beweis 2: 10 · 0,999... = 9,999...
− 1 · 0,999... = 0,999...
9 · 0,999... = 9 | : 9
0,999... = 1
Ist 0,999... kleiner oder gleich 1?
„0,999... nähert sich der 1", „schmiegt sich an", „strebt gegen 1."
Aber: Erreicht sie die 1 oder nicht?
10 · 0,999... = 9,999...
1 · 0,999... = 0,999...
9 · 0,999... = 8,9999... | : 9
0,999... = 0,999...
0,999... < 1
Einspruch: „0,9̄ ist ja keine Zahl, die man aufschreiben kann"

Folie

Erkläre folgende beiden Rechnungen:

1. **9,999… - 0,999…**

$$= (9 + 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots) - (0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots)$$

$$= 9 + 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots - 0{,}9 - 0{,}09 - 0{,}009 - \ldots$$

$$= 9 + (0{,}9 - 0{,}9) + (0{,}09 - 0{,}09) + (0{,}009 - 0{,}009) + \ldots$$

$$= 9 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$\mathbf{= 9}$$

2. **9,999…** **- 0,999…**

= (9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + …) – (0,9 + 0,09 + 0,009 + …)

= 9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + … - 0,9 - 0,09 - 0,009 - …

= (9 – 0,9) + (0,9 – 0,09) + (0,09 – 0,009) + (0,009 – 0,0009) + …

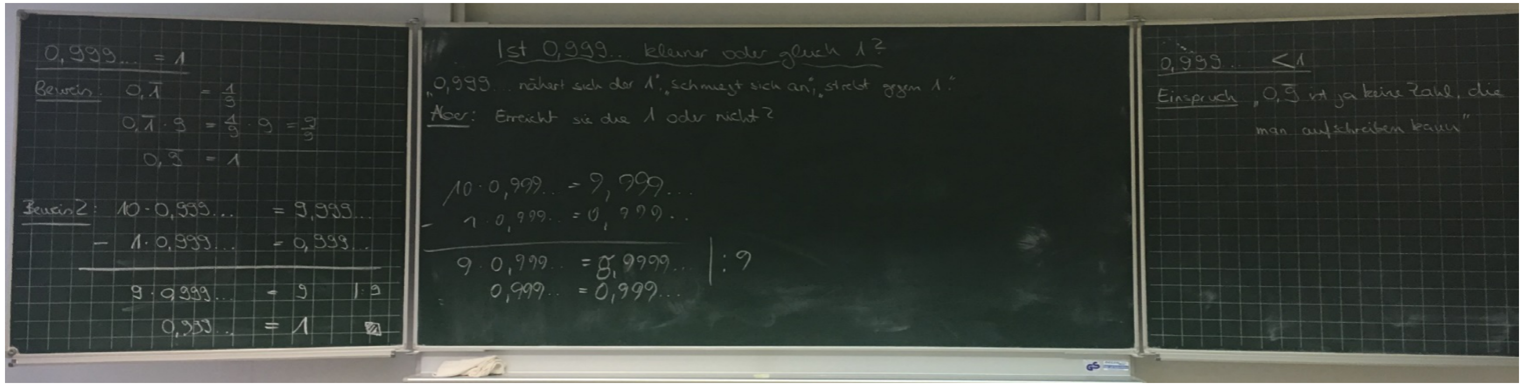
= 8,1 + 0,81 + 0,081 + 0,0081 + …

= 8,91 + 0,081 + 0,0081 + …

= 8,991 + 0,0081 + …

= 8,9991 + …

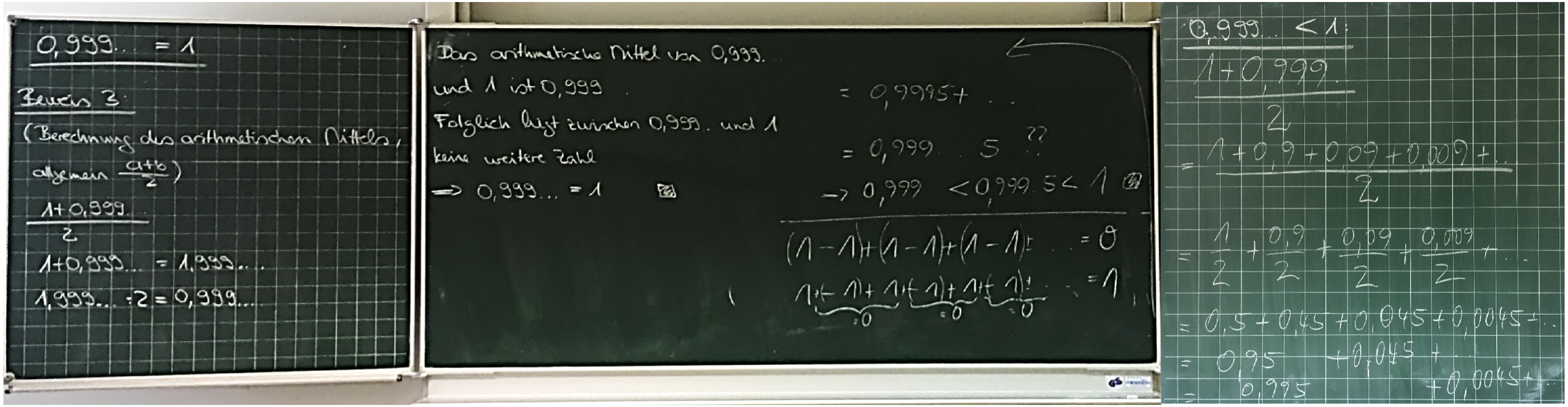
= 8,999…1 ??



Schüleräußerungen

zur 0,999… < 1 oder 0,999… = 1 - Problematik:

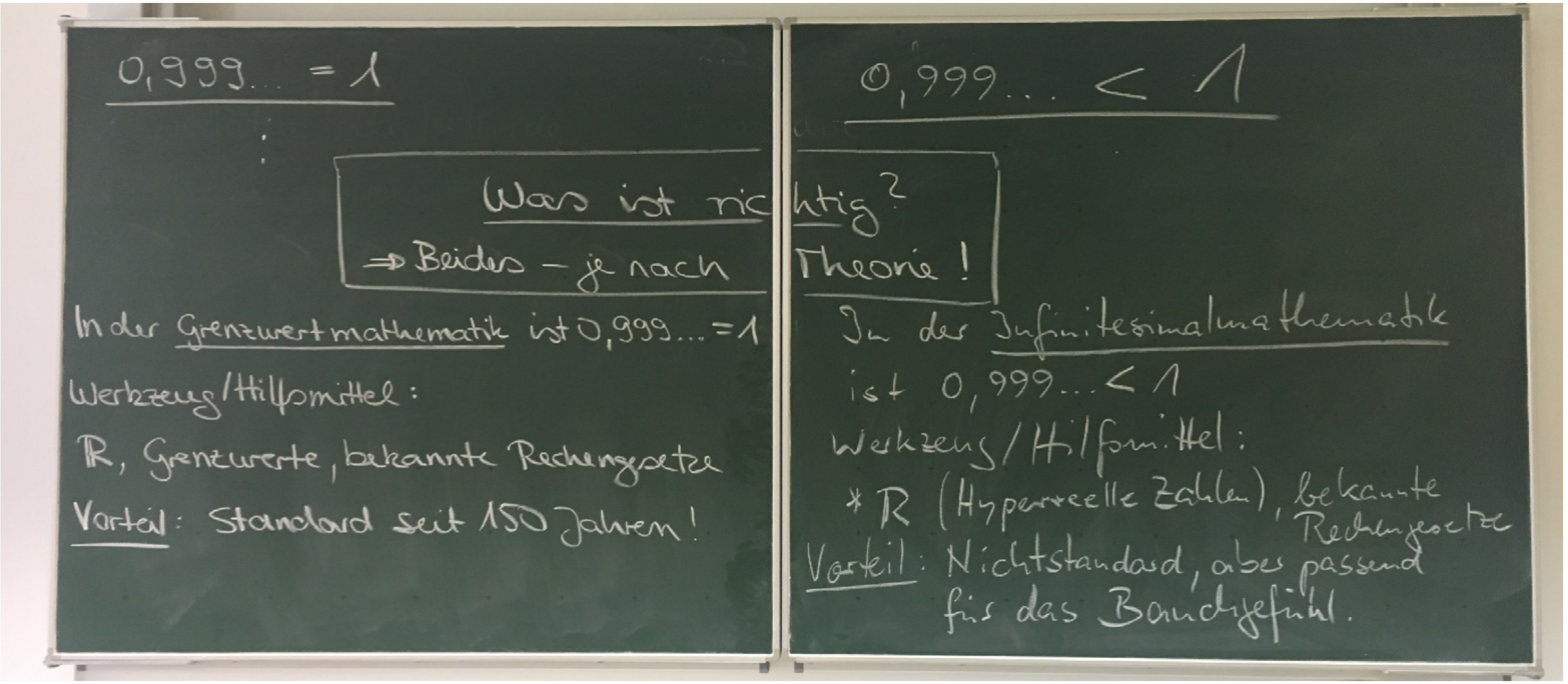
- Das ist ein Widerspruch in der Logik!
- Man müsste es graphisch zeigen; nur dann würde ich es glauben.
- Da funktioniert Mathematik – wie wir sie kennen – nicht mehr!
- Dieselbe Aufgabe hat 2 unterschiedliche Lösungen – das kann ja nicht sein; Mathe ist doch eindeutig!


0,999... = 1
Beweis 3:
(Berechnung des arithmetischen Mittels, allgemein $\frac{a+b}{2}$)
$\frac{1+0,999...}{2}$
1+0,999... = 1,999...
1,999... :2 = 0,999...
Das arithmetische Mittel von 0,999... und 1 ist 0,999...
Folglich liegt zwischen 0,999... und 1 keine weitere Zahl
⇒ 0,999... = 1
= 0,9995+ ...
= 0,999...5 ??
→ 0,999 < 0,999...5 < 1
(1 − 1) + (1 − 1) + (1 − 1) + ... = 0
1 + (−1 + 1) + (−1 + 1) + (−1 + 1) + ... = 1
0,999... < 1:
$\frac{1+0,999...}{2}$
$= \frac{1+0,9+0,09+0,009+...}{2}$
$= \frac{1}{2} + \frac{0,9}{2} + \frac{0,09}{2} + \frac{0,009}{2} + ...$
= 0,5 + 0,45 + 0,045 + 0,0045 + ...
= 0,95 + 0,045 + ...
= 0,995 + 0,0045 + ...

Weitere Schüleräußerungen

- Ich muss nochmal nachfragen: Wovon waren wir eigentlich ausgegangen? 0,999… als reelle Zahl oder unendlich? Mit unendlich könnten wir ja nicht rechnen – oder?
- Es gibt ja größere und kleinere Unendlichkeiten…
- Wenn ich nur natürliche Zahlen kenne, gibt es zwischen 9 und 10 auch keine Zahl mehr; vielleicht brauchen wir neue Zahlen?
- 0,999…5 – das Ende der Unendlichkeit kommt nie; also kommt auch die 5 nie; diese Zahl gibt es nicht!
- 0,999… < 1 und 0,999… = 1 stimmt beides nicht!
- Beides stimmt!
- Wir haben eine neue Zahl entdeckt!
- Was ein Schwachsinn!

Hausaufgabe: „Linas Brief“



Schüleräußerungen

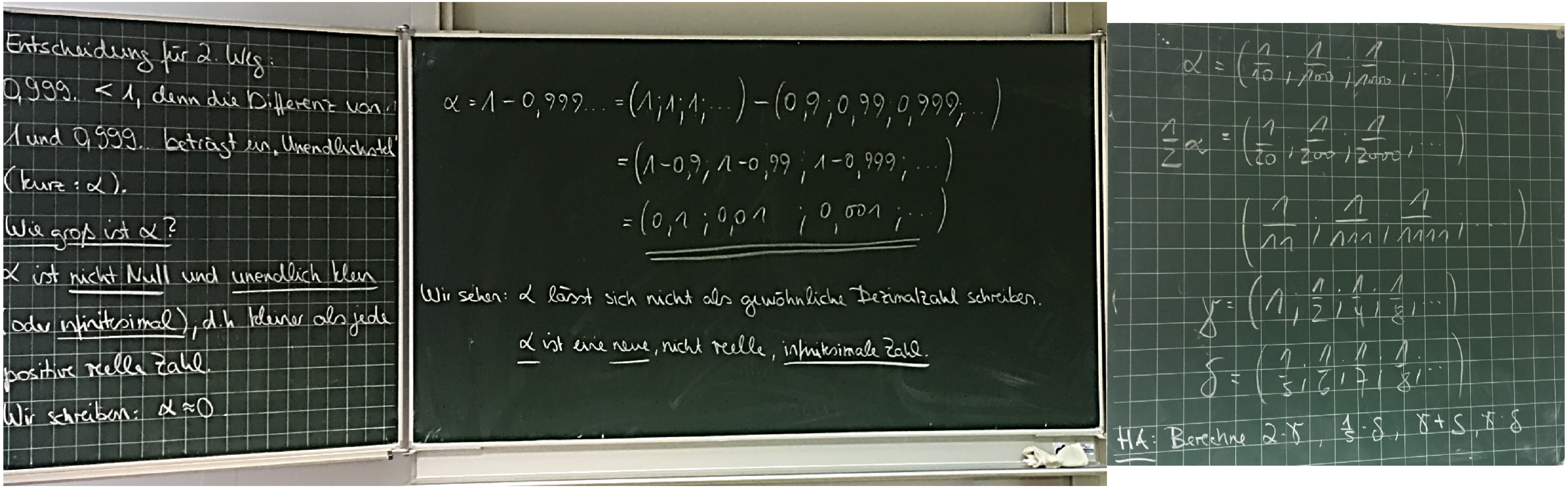
- Ich bin weiterhin zwiegespalten.
- Ein kleines Stück Unendlichstel fehlt noch bis 1.
- Die Unendlichkeit lässt sich nicht einschätzen!

Folie

Rückblick

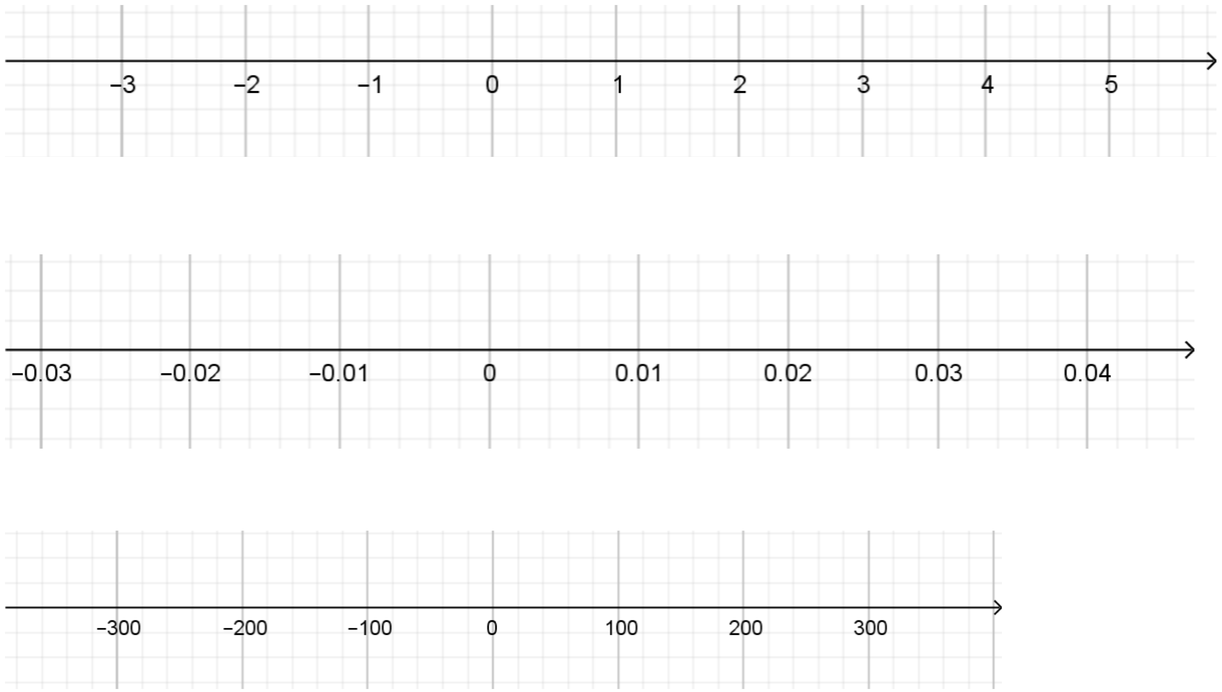
- Verwirrung (Rollenspiel) war beabsichtigt.
- Zwei unterschiedliche mathematische Theorien liegen zugrunde, aus denen sich unterschiedliche Folgerungen ergeben.
- Problem liegt im Umgang mit der „Unendlichkeit“ – diese gibt es nur in der Mathematik, vielleicht noch in Religion und Physik…
- Mathematik hat deshalb durchaus philosophische Züge.
- Mathematik ist eine Geisteswissenschaft und keine Naturwissenschaft.
- Es ist auch in der Mathematik nicht immer alles „klar“ bzw. eindeutig.
- Eventuell drängt sich der Verdacht auf, Mathematik sei „beliebig“ – das ist jedoch nicht berechtigt.

Hyperreelle Zahlen

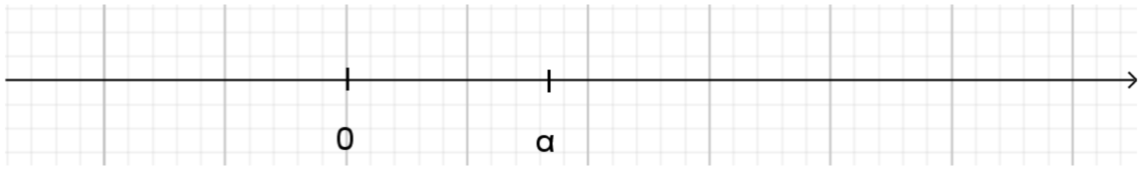


Folie

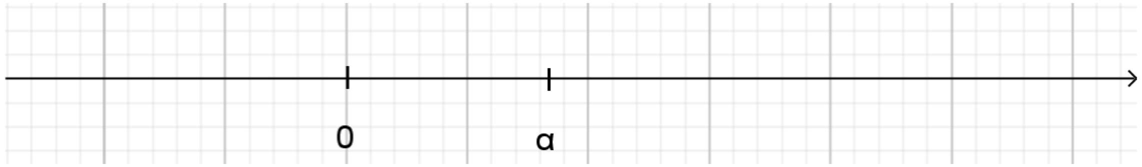
So kennst du die Zahlengerade



Aber jetzt?



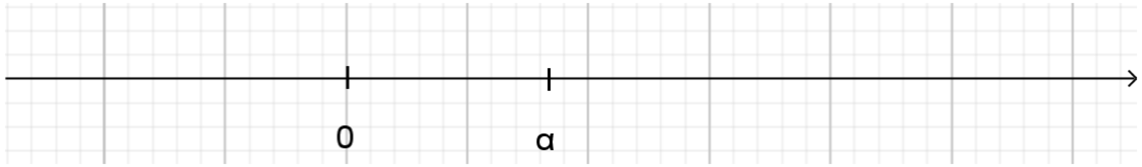
- Wo liegt 1 oder 0,1?
- Kannst du ½ α eintragen?



Aus dem Unterrichtsgespräch:

Wo liegt 1?

- 1 ist weiter rechts, noch weiter rechts, noch weiter rechts… → mathematischer Rausschmiss! (Geh doch zur 0,1!)
- Man müsste α mit ∞ multiplizieren; deshalb kann keine reelle Zahl auf dieser Zahlengeraden liegen.
- Eine Zahlengerade mit α geht nicht!

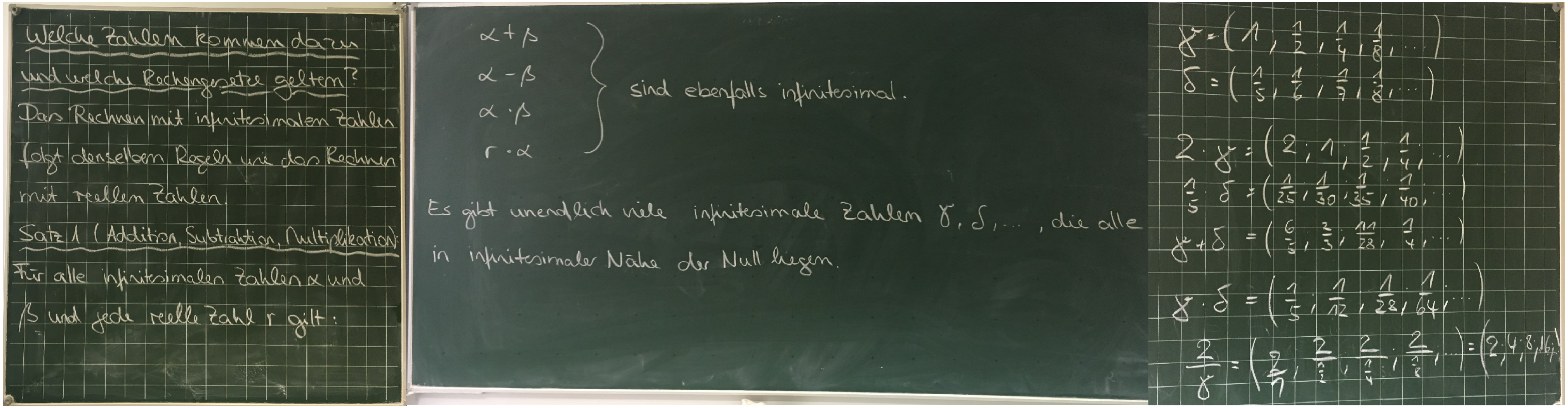


Wo liegt $\frac{1}{2}\alpha$?

- $\frac{1}{2}\alpha$ liegt dort, wo α liegt, denn α ist ja schon unendlich klein, und die Hälfte ist es dann auch.
- Wenn man $\frac{1}{2}\alpha$ nicht darstellen kann, dann kann man auch α nicht darstellen!
- Ein Unendlichstel nochmal zu halbieren, ist komisch!
- Man müsste $\frac{1}{2}\alpha$ mal rechnerisch ausprobieren!

Gibt es außer α weitere Infinitesimalien?

- Es gibt nur Vielfache von α als weitere Infinitesimalien.
- Konstruktion: $(\frac{1}{11}; \frac{1}{111}; \frac{1}{1111}; \dots)$
- Uns interessiert aber nur α! $\beta, \gamma, \delta, \dots$ brauchen wir nicht!
- Wir brauchen eine feste Schreibweise für die neuen Zahlen!
- Dürfen wir die 1 dann eigentlich noch wie immer schreiben? Kurzer Strich rauf, längerer runter? :-)


Welche Zahlen kommen dazu
und welche Rechengesetze gelten?
Das Rechnen mit infinitesimalen Zahlen
folgt denselben Regeln wie das Rechnen
mit reellen Zahlen.
Satz 1 (Addition, Subtraktion, Multiplikation):
Für alle infinitesimalen Zahlen α und
β und jede reelle Zahl r gilt:
α + β
α − β
α · β
r · α
sind ebenfalls infinitesimal.
Es gibt unendlich viele infinitesimale Zahlen γ, δ, ..., die alle
in infinitesimaler Nähe der Null liegen.
γ = (1, 1/2, 1/4, 1/8, ...)
δ = (1/5, 1/6, 1/7, 1/8, ...)
2 · γ = (2, 1, 1/2, 1/4, ...)
1/5 · δ = (1/25, 1/30, 1/35, 1/40, ...)
γ + δ = (6/5, 2/3, 11/28, 1/4, ...)
γ · δ = (1/5, 1/12, 1/28, 1/64, ...)
2/γ = (2/1, 2/(1/2), 2/(1/4), 2/(1/8), ...) = (2, 4, 8, 16, ...)

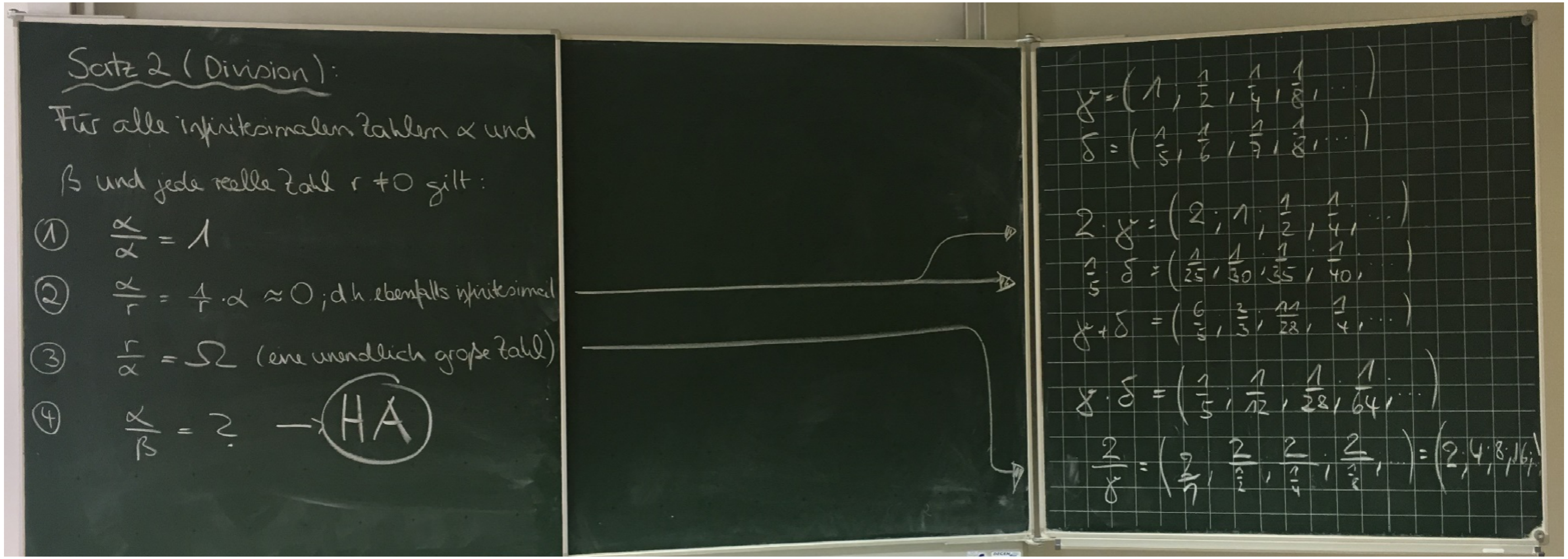
Aus dem Unterrichtsgespräch:

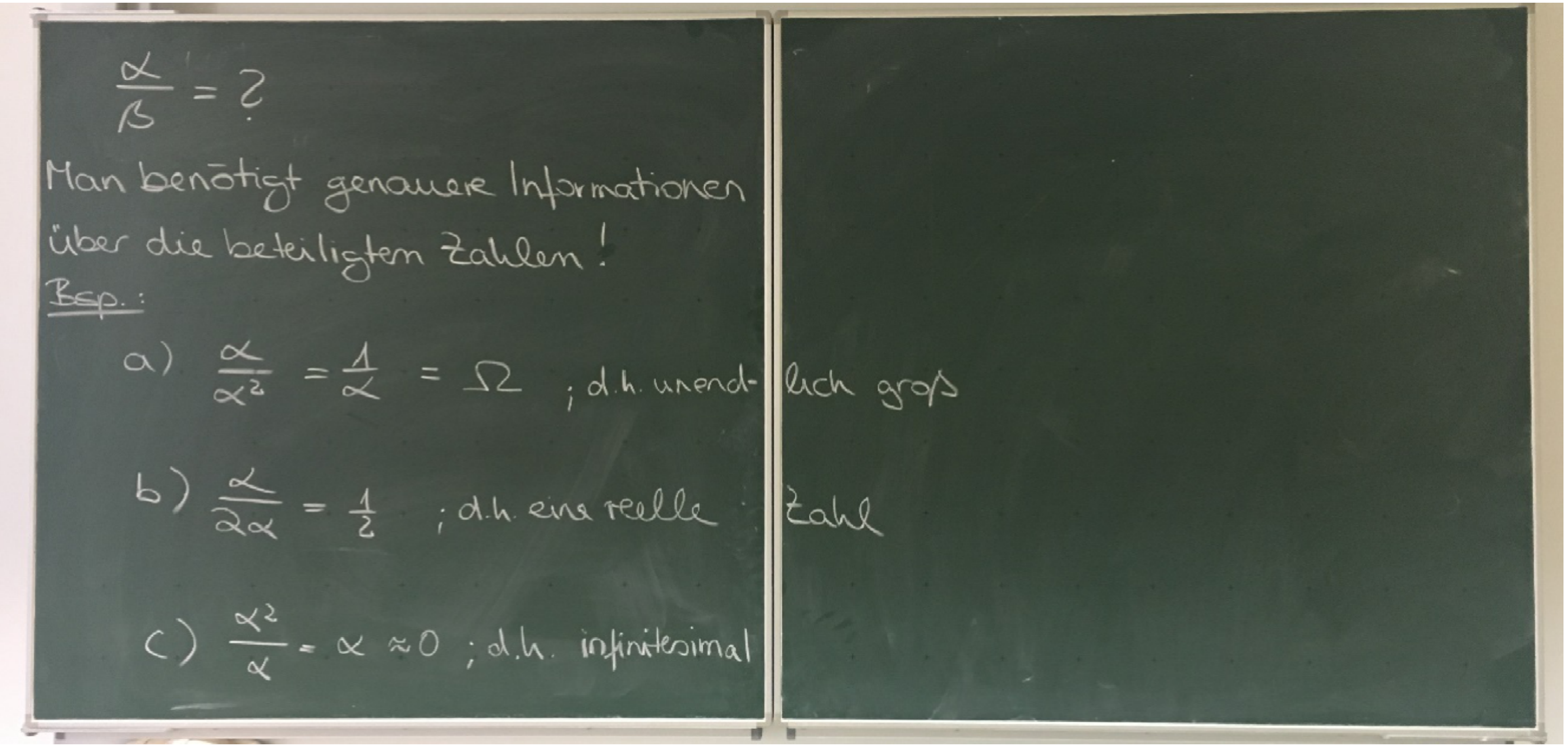
Gibt es eine kleinste Infinitesimalzahl?

- Was? Eine „reinste" Infinitesimalzahl? Was soll das sein?? Hmm…
- Nein, denn es kann immer noch um ein Unendlichstel kleiner sein.
- Man muss α unendlich mal halbieren, dann hat man die kleinste.
- Es gibt dann aber keine kleinste, weil man nicht unendlich oft halbieren kann. Das hört ja nie auf.
- Das ist wieder das Problem mit den größeren und kleineren Unendlichkeiten.
- Eigentlich sind wir gar nicht weitergekommen! Jetzt haben wir neue Zahlen, aber wir haben immer noch nicht die kleinsten gefunden. Oder?
- Außerdem ist das, wenn wir von den reellen Zahlen absehen, ja alles nur rein theoretisch, nur ein Modell.

Aus dem Unterrichtsgespräch zum Rechnen mit Infinitesimalien:

- Man addiert zwei Infinitesimalien, indem man jeweils die einzelnen „Dinger“ von den Zahlen addiert. – Wie heißen die Dinger eigentlich?
- Warum sprechen wir nur von Addition, Subtraktion, Multiplikation? Kann man die Infinitesimalien nicht dividieren?




$\frac{\alpha}{\beta} = ?$
Man benötigt genauere Informationen über die beteiligten Zahlen!
Bsp.:
a) $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \Omega$; d.h. unendlich groß
b) $\frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$; d.h. eine reelle Zahl
c) $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha \approx 0$; d.h. infinitesimal

Arbeitsblatt

Übungen

Es sei $\alpha = (0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \dots)$; $\gamma = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots)$; $\delta = (\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \dots)$.

1a) Berechne $\gamma + \delta$ sowie $\gamma \cdot \delta$.

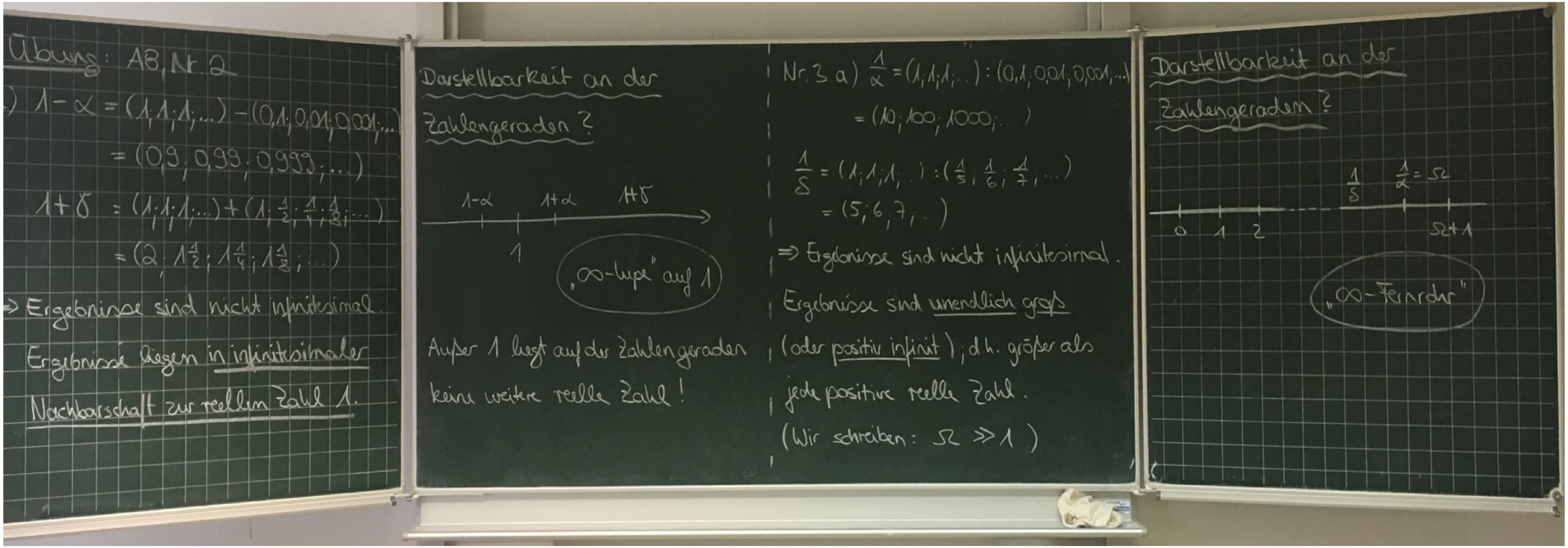
1b) Sind auch die Ergebnisse dieser Rechnungen infinitesimal? Begründe!

2a) Berechne $1 - \alpha$ sowie $1 + \gamma$.

2b) Sind auch die Ergebnisse dieser Rechnungen infinitesimal? Begründe!

3a) Berechne $\frac{1}{\alpha}$ sowie $\frac{1}{\delta}$.

3b) Sind auch die Ergebnisse dieser Rechnungen infinitesimal? Begründe!


Übung: AB, Nr. 2
) 1 − α = (1;1;1;...) − (0,1; 0,01; 0,001; ...)
= (0,9; 0,99; 0,999; ...)
1 + γ = (1;1;1;...) + (1; 1/2; 1/4; 1/8; ...)
= (2; 1 1/2; 1 1/4; 1 1/8; ...)
⇒ Ergebnisse sind nicht infinitesimal.
Ergebnisse liegen in infinitesimaler Nachbarschaft zur reellen Zahl 1.
Darstellbarkeit an der Zahlengeraden?
1−α
1+α
1+γ
1
„∞-Lupe" auf 1
Außer 1 liegt auf der Zahlengeraden keine weitere reelle Zahl!
Nr. 3 a) 1/α = (1;1;1;...) : (0,1; 0,01; 0,001; ...)
= (10; 100; 1000; ...)
1/δ = (1;1;1;...) : (1/5; 1/6; 1/7; ...)
= (5; 6; 7; ...)
⇒ Ergebnisse sind nicht infinitesimal.
Ergebnisse sind unendlich groß (oder positiv infinit); d.h. größer als jede positive reelle Zahl.
(Wir schreiben: Ω ≫ 1)
Darstellbarkeit an der Zahlengeraden?
1/δ
1/α = Ω
0
1
2
Ω+1
„∞-Fernrohr"

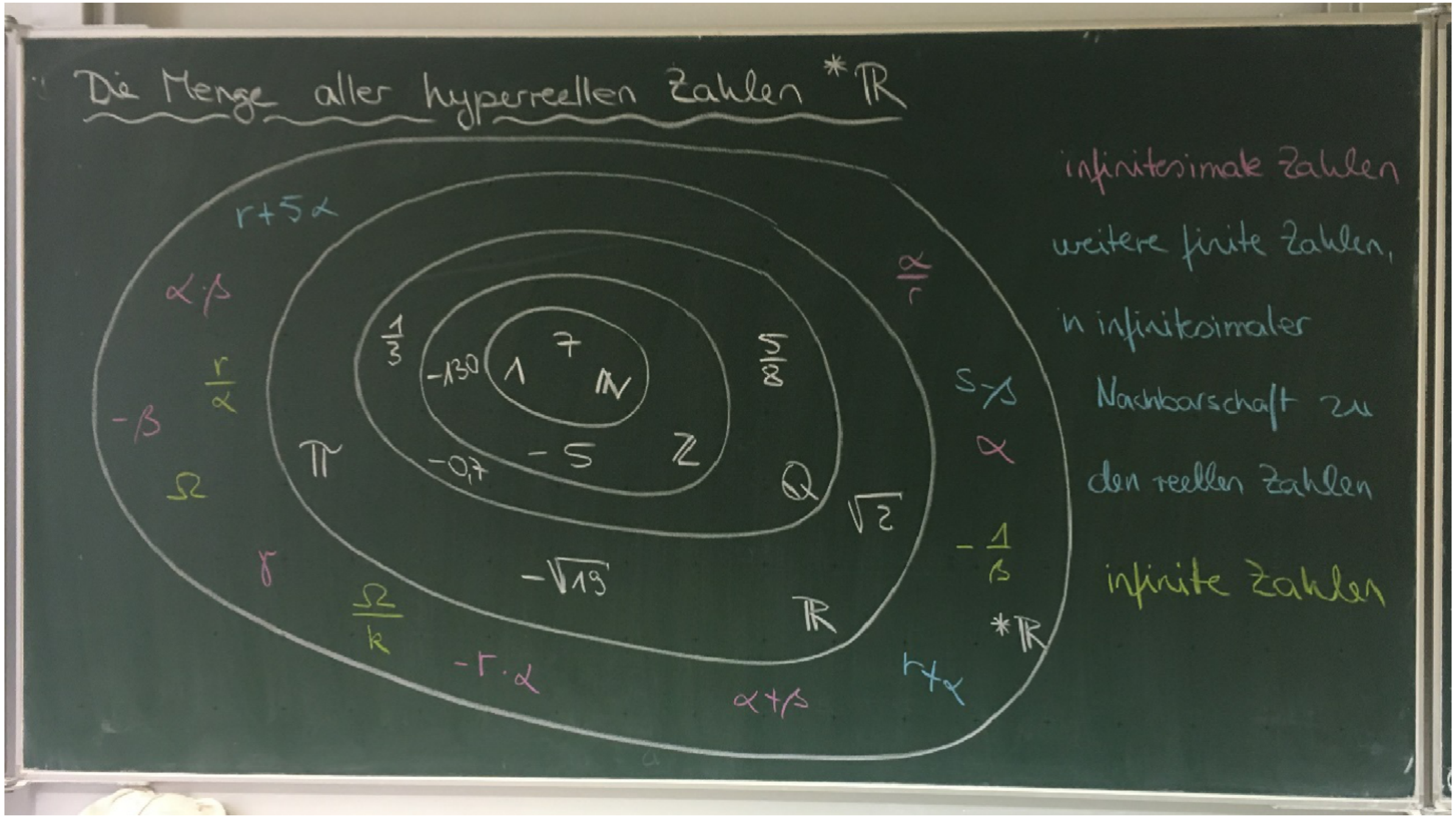
Aus dem Unterrichtsgespräch

zur Darstellung von $1-\alpha$ und $1+\gamma$ an der Zahlengeraden:

- Die Zahlen sind ja ganz, ganz dicht bei der 1. Nach der anderen Theorie wären sie ja sogar 1.
- So wie wir das bei der Null gemacht haben, müssen wir jetzt die 1 „herzoomen“.
- Und dann gibt es dort auch keine weitere reelle Zahl außer der 1.

Zur Darstellung von $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\delta}$ an der Zahlengeraden:

- $\frac{1}{\delta}$ ist ja eine ganz, ganz große Zahl, jetzt wahrscheinlich größer als jede positive reelle Zahl, und $\frac{1}{\alpha}$ ist auch ganz, ganz groß… also beides wächst über alles, was man sich vorstellen kann, hinaus.
- $\frac{1}{\alpha}$ wächst noch mehr als $\frac{1}{\delta}$! Jetzt müssen wir die Lupe ganz nach rechts halten!
- Ja, bis zum Herrn Fuhrmann… und vermutlich noch weiter. (War zu dieser Zeit im Skiurlaub ;-))


Die Menge aller hyperreellen Zahlen *R
infinitesimale Zahlen
weitere finite Zahlen, in infinitesimaler Nachbarschaft zu den reellen Zahlen
infinite Zahlen
N
Z
Q
R
*R
7
1
-130
-5
-0,7
1/3
5/8
π
√2
-√19
r+5α
α·β
r/α
-β
Ω
γ
Ω/k
-r·α
α+β
r+α
α/r
S-β
α
-1/β