Eleonoren-Gymnasium
Worms

Einführung
Reelle Zahlen

Eine Unterrichtsreihe in BeGyS 8 (Klasse 9)
Schuljahr 2021/22

Christine Hahn und Volkhardt Fuhrmann

Überblick über die Unterrichtsreihe

Eleonoren-Gymnasium Worms

Inhalt	Zeitansatz
Wiederholung: Zahlenmengen und Zahlengerade	1 h
Weiterführung: Die Diagonale d im Einheitsquadrat	2 h
Problem der Quadratverdopplung	5 h
Auffinden/ Erfinden einer neuen Zahl	4 h
Rechnen in Q($\sqrt{2}$)	4 h
Rechnen in Q($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$) und in Q($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, …)	3 h
Ordnen und Vereinfachen – Terme mit Quadratwurzeln	…
…	…

Wiederholung:
Zahlenmengen und Zahlengerade

Ziele

- Natürliche Zahlen -> Negative Zahlen -> Rationale Zahlen
- Lücken auf der Zahlengerade bei N und Z; Q liegt „dicht", denn zwischen a und b passt mindestens (a+b)/2 – also gibt es auf der Zahlengerade keinen Platz mehr: jeder Punkt dort stellt eine rationale Zahl dar – oder vielleicht nicht???
- Jede Bruchzahl ist auf der Zahlengerade (unabhängig vom Maßstab) exakt einzeichenbar (ggf. Hilfsgerade benutzen)!

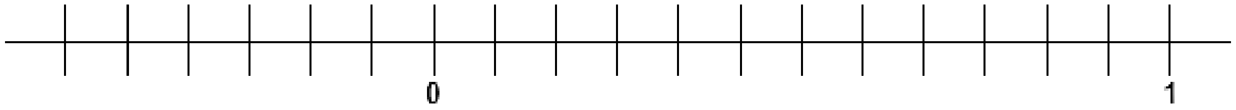
Arbeitsblatt

Wiederholung Zahlengerade

Aufgaben:

1) Trage auf der Zahlengeraden ein:

$\frac{1}{2}$; $-0{,}5$; $\frac{5}{6}$; $-\frac{1}{3}$; $0{,}75$; $\frac{5}{12}$; $-\frac{3}{24}$; $\frac{5}{7}$



2) Kannst du drei Zahlen zwischen $\frac{1}{12}$ *und* $\frac{2}{12}$ *angeben?*

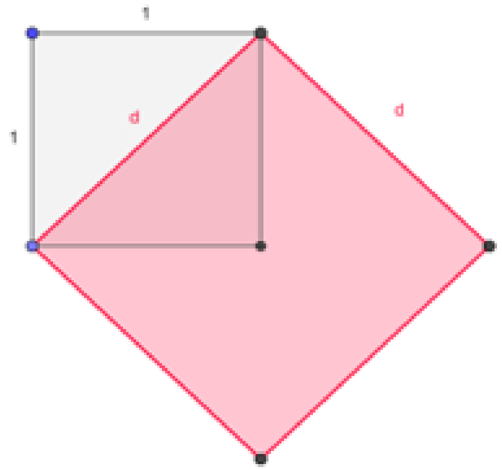
Aus dem Unterrichtsgespräch

- „Es passen zwischen a und b ganz viele rein, aber nicht unendlich viele.“
- „$0,\overline{9}$ ist auch fast 1 und dann ist es auf einmal 1. Also passt da nichts mehr dazwischen – oder doch?“
- „π hat auch unendlich viele Nachkommastellen und muss ja irgendwo auf der Zahlengerade liegen, denn es ist ja definitiv zwischen 3,1 und 3,2. Das wissen wir ja.“

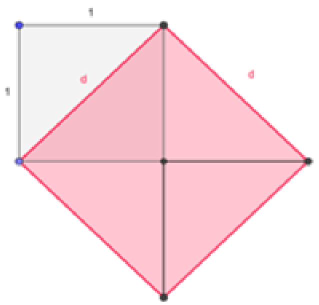
Weiterführung:
Die Diagonale d im Einheitsquadrat

Arbeitsblatt

Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Wie groß ist die rote Fläche?
Wie lang ist die Diagonale d?



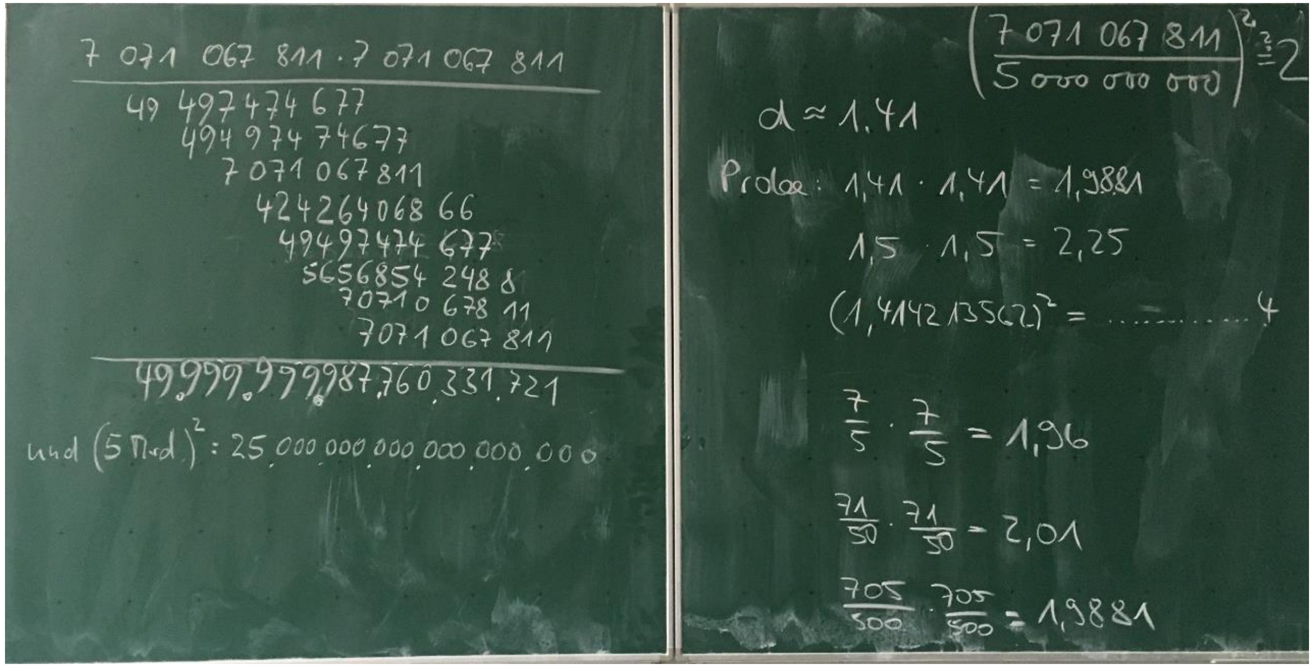
Aus dem Unterrichtsgespräch (wie gewohnt…)



- A = 4 * halbes Quadrat = 2 * Quadrat = 2 * 1² = 2
- d ≈ 1,4 (durch Messung und ggf. Umrechnung des Maßstabs)
- L: „Lässt sich das genauer angeben?"
- SuS: „Wie meinen Sie das?"
- L: „Welche Bedeutung hat denn d in der Abbildung?"
- SuS: „Seitenlänge des roten Quadrats."
- L: „Und was bedeutet das für die Länge von d?"
- SuS: „d² muss 2 sein!"
- L: „Dann versucht doch mal, d noch genauer als Bruch oder Dezimalbruch anzugeben!"

Aus dem Unterrichtsgespräch (wie gewohnt weiter…)

- SuS suchen diese Länge mit verschiedenen Ansätzen und bilden z.B. zu 1,41 und 1,42 sowie 1,414 und 1,415 die zugehörigen Quadratzahlen.
- SuS: „Vermutlich müssen wir nur lange genug probieren – vielleicht auch besser mit gewöhnlichen Brüchen - bis es dann irgendwie passt…“



Aus dem Unterrichtsgespräch (anders als gewohnt weiter…)

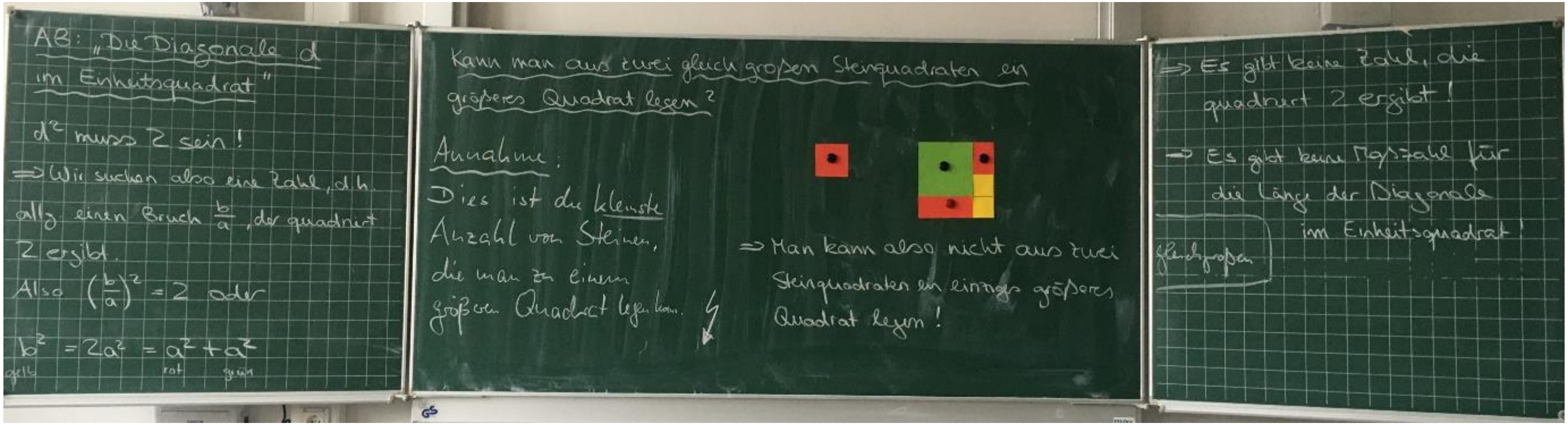
- L: „Also gut! Wir suchen also eine Zahl, d.h. allgemein einen Bruch $\frac{b}{a}$, der quadriert 2 ergibt. Also $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$ oder $b^2 = 2a^2 = a^2 + a^2$.

  Oder anders ausgedrückt: Wir suchen zwei gleich große Quadrate,

  die zusammen so groß sind wie ein drittes größeres Quadrat – richtig?"
- SuS: „Ja, so kann man es auch sehen…"
- L: „Mit diesem Problem, der „Quadratverdoppelung", haben sich schon zwei alte Griechen vor vielen Jahren beschäftigt, **Alpheios und Diokles**. Lasst uns deren Diskussion mal nachverfolgen."

Alpheios und Diokles nach der Vorlage in: https://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Sinus_und_Sinus-Transfer/2.11_Quawu-Irrationalitaet.pdf

Problem der Quadratverdoppelung

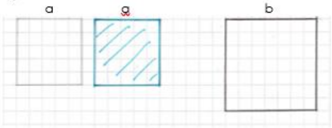


Fragen zum Zwiegespräch zwischen Alpheios und Diokles

Fragen zum *Zwiegespräch* (Schauspiel)

- Mit welchem Problem beschäftigen sich Alpheios und Diokles?
- Welche unterschiedlichen Positionen vertreten Alpheios und Diokles in Bezug auf die Lösung dieses Problems?
- Alpheios möchte seine Behauptung durch einen <u>*indirekten Beweis*</u> belegen. Welche *Annahme* macht er dabei, die er im Laufe des Zwiegespräches zum *Widerspruch* führen möchte?
- Kannst du die einzelnen Schritte, die Alpheios aus der Annahme folgert, wiedergeben?
  Vielleicht helfen dir dabei folgende Skizzen:

a)



b)

c)

- Worin besteht jetzt genau der Widerspruch zu der Annahme, die Alpheios anfangs gemacht hat?
- Wieso ist das weiße Restviereck im kleinen Quadrat links (Abb. c) ein Quadrat?
- Wieso besteht das weiße Restrechteck im großen Quadrat rechts (Abb. c) aus zwei Quadraten?
- Was hat dieses Zwiegespräch damit zu tun, dass d <u>keine</u> rationale Zahl sein kann?

Das Zwiegespräch und seine Bedeutung für die Länge d

„Man kann also nicht aus zwei gleich großen Quadraten mit ganzzahliger Seitenlänge ein einziges größeres Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge legen.“

$\Leftrightarrow$

Es gibt <u>keine</u> natürlichen Zahlen a und b, für die gilt: $a^2 + a^2 = b^2$ bzw. $2a^2 = b^2$

$\Leftrightarrow$

<u>Für alle</u> natürlichen Zahlen a und b gilt: $2a^2 \neq b^2$

$\Leftrightarrow$

<u>Für alle</u> natürlichen Zahlen a und b gilt: $\frac{b^2}{a^2} \neq 2$

$\Leftrightarrow$

<u>Für alle</u> natürlichen Zahlen a und b gilt: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \neq 2$

$\Leftrightarrow$

Es existiert <u>kein</u> Bruch, der quadriert 2 ergibt.

$\Leftrightarrow$

d ist <u>keine</u> (rationale) Zahl.

Das Zwiegespräch und die Resonanz in der Presse… ;-)

Ist die Mathematik am Ende?

Schock in der Mathewelt: Sichtbare Länge lässt sich nicht mit Zahlen beschreiben

WORMS (vfch). Der Frage nach dem Ende der Mathematik stellen sich zurzeit zahlreiche Experten des Clubs „Mathe-forever-8e“.

Was ist geschehen?

Im *Einheitsquadrat* lässt sich die Diagonale d einzeichnen, die für jedermann sichtbar eine bestimmte Länge besitzt. Für diese Länge – die im Folgenden auch mit d bezeichnet werden soll - muss gelten: $d^2 = 2$. Eine grobe Messung von d ergibt 1,4; etwas genauer dann vielleicht 1,41.

Einige clevere Mitglieder des besagten mathematischen Clubs konnten durch geschicktes Vorgehen sogar noch weit mehr Nachkommastellen für die gesuchte Länge der Diagonalen identifizieren und durch beharrliches Suchen auch Brüche ausfindig machen, die quadriert ziemlich genau 2 ergeben.

Aber dann passierte das Unfassbare: Zwei alte – als Alpheios und Diokles bekannte – Griechen, die den Clubmitgliedern zunächst als brauchbare Helfer auf der Suche nach der Länge von d erschienen, führten diese Suche geradezu ad absurdum. Sie konnten der neueren Generation überzeugend vermitteln, dass sich die Länge d niemals (!) genau mit den vorhandenen Zahlen angeben lässt! Entweder sind die Zahlen quadriert kleiner als 2 oder sie sind größer als 2, aber niemals gleich 2, wie es im Falle der Maßzahl d sein müsste…

Das Entsetzen war allen Beteiligten deutlich ins Gesicht geschrieben.

Und es geht noch weiter mit den Überraschungen: Glaubt man Gerüchten im näheren Umfeld des Clubs „Mathe-forever-8e“ so soll sich die Diagonale mit dem Zirkel auf die Zahlengerade drehen lassen, so dass sie dort auf einen Punkt trifft, der jedoch nicht mit den bekannten Zahlen beschrieben werden kann. Offenbar trifft die gedrehte Diagonale auf eine *Lücke* der Zahlengerade!

Das hat weitreichende Konsequenzen für das Verständnis der Zahlengerade: Jede Zahl - auch wenn sie noch so kompliziert ist, wie etwa 110/39 - lässt sich auf ihr durch einen Punkt darstellen, aber nicht jeder Punkt entspricht einer Zahl, wie man im Fall d sieht. Die Zahlengerade enthält Lücken (zumindest eine…), auch wenn zwischen zwei Zahlen immer noch mindestens eine gefunden werden kann.

Ein Clubmitglied fasst das kopfschüttelnd und nervlich sichtlich angespannt so zusammen: „All das erscheint mir sehr kompliziert und verwirrend: Man <u>sieht</u> die Diagonale d, man <u>sieht</u>, dass sie eine bestimmte Länge haben muss (!) – aber diese Länge lässt sich nicht durch eine Maßzahl angeben. Also ist sie nicht messbar…“

Entsetzen in Fachkreisen: Es scheint keine Zahl zu geben, die quadriert 2 ergibt. Foto: Groebe-press

Noch wolle man sich aber nicht endgültig damit abfinden, dass die Mathematik am Ende sei, wie die Pressesprecherin des Clubs mitteilte.

Sachdienliche Hinweise zum Auffinden einer geeigneten Zahl würden daher in der kommenden Woche noch in Raum 216 entgegengenommen.

Aus dem Unterrichtsgespräch zum Zeitungsartikel

- „Die sichtbare Länge lässt sich nicht mit ´mathematischen Zahlen` beschreiben, die wir heute kennen!“
- „Ist dieselbe Lücke eigentlich auch im negativen Bereich?“
- „Lücke in der Zahlengerade bedeutet doch Lücke im System!?“
- „Die Lücke schockiert mich nicht; muss ja so Zahlen wie π geben! Es gibt vermutlich ein paar solcher Zahlen, aber nicht viele…“
- „Aber bestimmt gibt es auch noch an anderen Stellen solche Lücken. Also nicht bei 4 oder 9, aber bei 3 oder so… - irgendwie sind die Lückenzahlen so `Fast-Zahlen`“

Vertiefung des Unterrichtsgesprächs zum Zeitungsartikel

- Alles ist Zahl: Rückblick auf Zahlbereichserweiterungen, N->Z->Q unproblematisch, aber jetzt reichen unsere bisherigen Zahlen nicht mehr aus…
- Mathematik ist am Ende: Erschütternde Probleme. Deshalb sind intensive und neue Überlegungen nötig!
- Aufgabe:

  Max Schlaumeier behauptet: „Ich kann jede Zahl als Punkt auf der Zahlengerade darstellen. Dann stellt auch umgekehrt jeder Punkt auf der Zahlengerade eine Zahl dar!"

  Was meinst du zu dieser Behauptung?

Schüleräußerungen zu Max Schlaumeier

- „Falsch! d ist doch eine Loch, eine Lücke auf der Zahlengeraden!“
- „Aber man kann die Lücke als Zahl sehen, als Lückenzahl!“
- „Die Lückenzahl ist da, aber man kann sie nicht mit unseren Zahlen darstellen!“

Und weiter:

- „Die Zahl gibt es <u>bisher</u> noch nicht. Wir müssen sie erfinden…“
- „Warum sollen wir eine Zahl suchen, von der wir wissen, dass es sie nicht gibt, nur um herauszufinden, dass es sie nicht gibt?“
- „Wir wollen diese Zahl doch gerade <u>erfinden</u>!“

Auffinden/ Erfinden einer neuen Zahl

Gruppenarbeitsaufträge zum Zeitungsartikel

Sachdienliche Hinweise zum Auffinden einer geeigneten Zahl…

Diskutiert in der Gruppe:

1. Was muss diese geeignete, neue Zahl leisten?

2. Wie soll sie heißen?

3. Wie lässt sich diese neue Zahl in unsere bisherigen Zahlen „integrieren“?
   An welche Regeln soll sie sich dann halten?

4. Welche weiteren Fragen stellen sich dabei?

Schüleräußerungen zu 1) Was muss diese geeignete, neue Zahl leisten?

„Die Zahl soll…

- … die Lücke ersetzen!“
- … quadriert 2 ergeben.“
- … die Länge von d darstellen!“
- … soll sich als Bruchzahl darstellen lassen… Häh? Ähm. Nee, ja gerade nicht! Aber sie soll auf jeden Fall zwischen zwei Bruchzahlen passen.“
- … soll Lücke füllen und sich ins System einfügen, d.h. dass es zum Beispiel 2 + ‚die Zahl‘ auch geben muss.“

Schüleräußerungen zu 2) Wie soll sie heißen?

- „d“
- „Lückenzahl“
- „i, … als Inspiration von Pi“
- „Hildegard“
- „Name muss die konkrete Stelle/Lücke klar benennen“
- „$\sqrt{2}$"

Schüleräußerungen zu 3) Wie lässt sich diese bisherige Zahl in unsere Zahlen „integrieren“? An welche Regeln soll sie sich dann halten?

„Die neue Zahl…

- …sollte ins Zahlensystem passen, es nicht durcheinander bringen.“
- … soll sich zwischen Bruchzahlen eingliedern lassen.“
- … sollte alle mathematischen Regeln befolgen.“
- „KG, AG, DG sollen gelten.“
- „Man soll mit ihr rechnen können (+,-,*,:) und Punkt vor Strich soll gelten.
- „Sie soll endlich sein. (Wird scheitern…)“

Schüleräußerungen zu 4) Welche weiteren Fragen stellen sich dabei?

- „Gibt es dieselbe Lücke auch im negativen Bereich? Also quasi -‚die Lückenzahl'?"
- „Trifft man, wenn man mit der Lückenzahl rechnet, auf weitere Lückenzahlen oder auf richtige?"
- „Gibt es weitere Lückenzahlen? Ich denke schon, z.B. die Zahl, die quadriert 3 ergibt?"
- „Müsste ja so sein, vielleicht genauso viele Lückenzahlen wie echte Zahlen…?"

Anknüpfen an die Gruppenarbeitsergebnisse

Ihr habt gefordert, **1)** dass die neue Zahl „die Lücke schließen" muss. Die Idee ist nicht ganz neu…

Dedekindscher Schnitt (1872)

U ist der Bereich der Zahlen q mit $q^2 < 2$.

O ist der Bereich der Zahlen mit $q^2 > 2$.

Alle Zahlen in U sind kleiner als alle Zahlen in O.

Ein „Schnitt" in $\mathbb{Q}$ besteht aus zwei solchen Bereichen U und O.

U heißt in der Mathematik „Unterklasse", O „Oberklasse.

(1) U ist die Unterklasse der Zahlen q mit $q^2 < 2$,

O ist die Oberklasse der Zahlen mit $q^2 > 2$.

Dazwischen ist eine Lücke in $\mathbb{Q}$. Denn es gibt *keine* Zahl q mit $q^2 = 2$.

Und weiter…

(2) U ist die Klasse der Zahlen q mit $q^2 < 9$,

O ist die Klasse der Zahlen mit $q^2 > 9$.

Dazwischen ist *keine* Lücke $\mathbb{Q}$. Denn es gibt eine Zahl q mit $q^2 = 9$.

Immer wenn zwischen Unterklassen U und Oberklassen O eine Lücke in $\mathbb{Q}$ ist,

erschaffen wir (denken wir uns, fordern wir) eine Zahl, die die Lücke schließt.

- Der Bereich der Zahlen, der so aus $\mathbb{Q}$ entsteht, heißt $\mathbb{R}$.
  Die Zahlen in $\mathbb{R}$ heißen „reelle Zahlen“.

Quelle: Thomas Bedürftig

Vertiefung? Am Nachmittag.

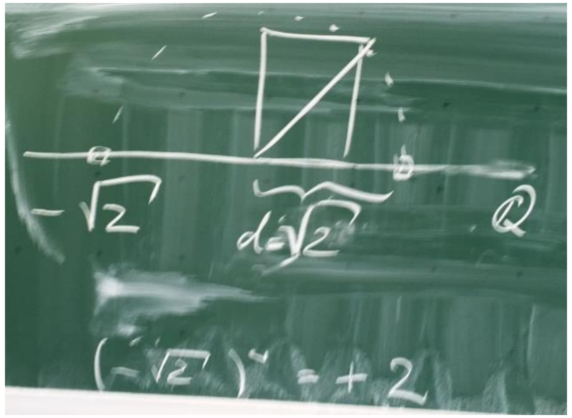
Weitere Anknüpfung an die Gruppenarbeitsergebnisse

Ihr habt gefordert, **2)** dass die neue Zahl die konkrete Lücke klar benennt. Wir vereinbaren:

Üblich als Name ist $\sqrt{2}$ („Wurzel aus 2" oder kurz „Wurzel 2").

Also: $\sqrt{2}$ ist die positive Zahl, die quadriert 2 ergibt.

Die Menge, in die jetzt $\sqrt{2}$ mit aufgenommen wird, nennen wir $Q(\sqrt{2})$.



Klärung der Frage: Auch $(-\sqrt{2})$ ergibt quadriert 2, aber eine Zahl muss eindeutig festgelegt sein.

Rechnen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

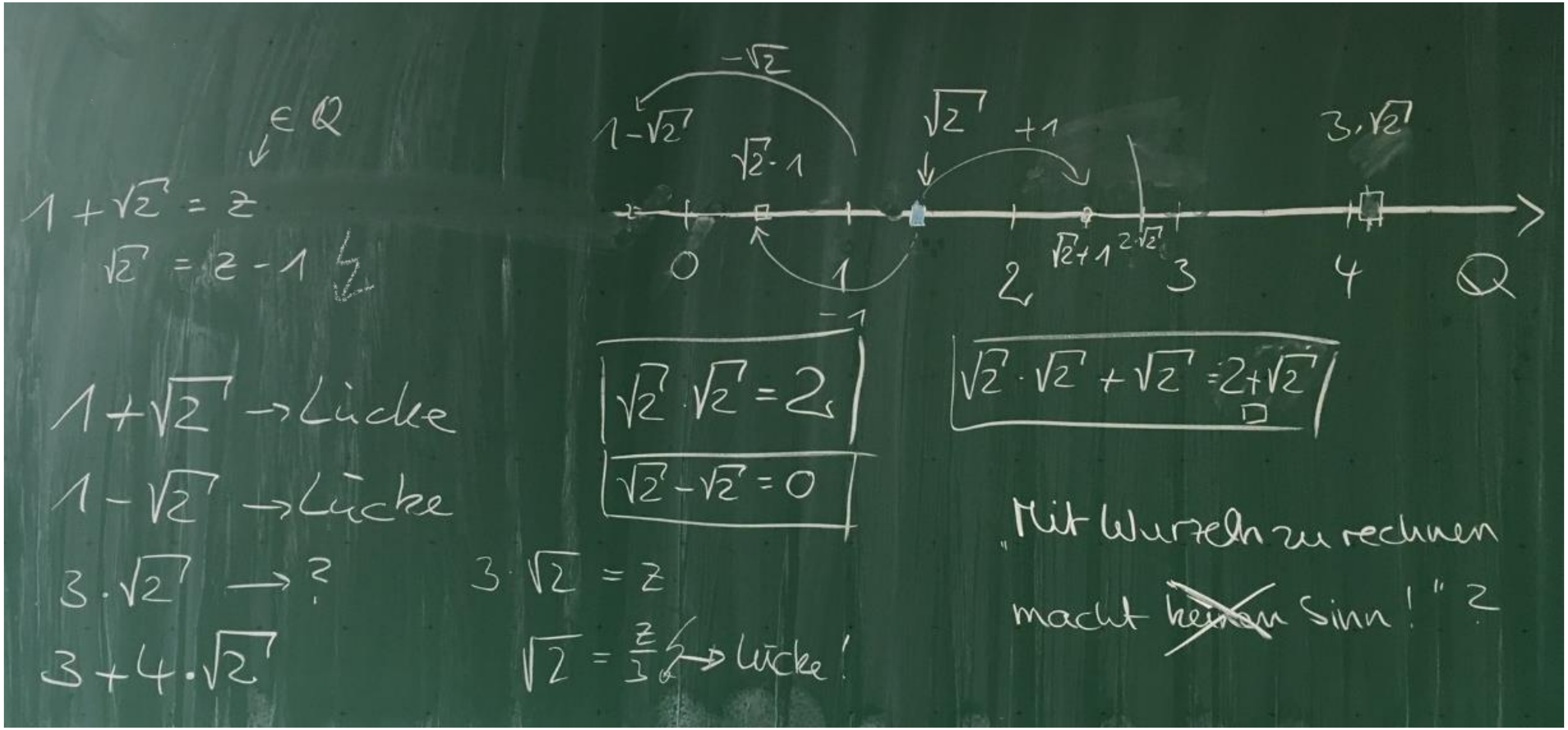
Weitere Anknüpfung an die Gruppenarbeitsergebnisse

Ihr habt gefordert, dass sich **3)** die neue Zahl an bestehende Regeln halten muss, die bereits für die alten Zahlen gelten, d.h. wir müssen auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ rechnen können, also addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Treffen folgende „Zahlen" ebenfalls auf eine Lücke der Zahlengerade oder nicht?

a) $1 + \sqrt{2}$ **b)** $1 - \sqrt{2}$ **c)** $3 \cdot \sqrt{2}$ **d)** $3 + 4 \cdot \sqrt{2}$?

Lösung an der Zahlengeraden



Übungen zum Rechnen in Q $(\sqrt{2})$

Rechnen in Q($\sqrt{2}$)

Beachte: Wir befinden uns in einem erweiterten Zahlenraum, genauer im Raum aller rationalen Zahlen, erweitert um die irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Von dieser neuen Zahl wissen wir: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

- Ist die Zahl $1 + \sqrt{2}$ rational oder irrational? Und die Zahl $7 \cdot \sqrt{2}$?

Alle Zahlen in Q($\sqrt{2}$) sind von der Form $a + b \cdot \sqrt{2}$ mit rationalen Zahlen a und b.

Die „alten“ rationalen Zahlen ergeben sich für b = 0.

1. Addition und Subtraktion

a) $(2 + \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2})$

b) $(6 + 2 \cdot \sqrt{2}) + (5 + 3 \cdot \sqrt{2})$

c) $(1 + 0{,}5 \cdot \sqrt{2}) - (1{,}5 - 7 \cdot \sqrt{2})$

… und weiter:

2. Multiplikation

a) $6 \cdot (4 + 3 \cdot \sqrt{2}) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$

b) $10 \cdot \sqrt{2} \cdot (2 - 3 \cdot \sqrt{2})$

c) $(2 + 3 \cdot \sqrt{2}) \cdot (4 - 0{,}5 \cdot \sqrt{2})$

d) $(3 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})$

3. Division

a) $4 : \sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ (Tipp: Um das Ergebnis in der gewünschten Darstellung $a + b \cdot \sqrt{2}$ zu erhalten, musst du geschickt so erweitern, dass der Nenner rational wird…)

b) $\frac{3+\sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

e) $\frac{1+3 \cdot \sqrt{2}}{3+2 \cdot \sqrt{2}}$

Rechnen in Q($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$) und in Q($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,...)

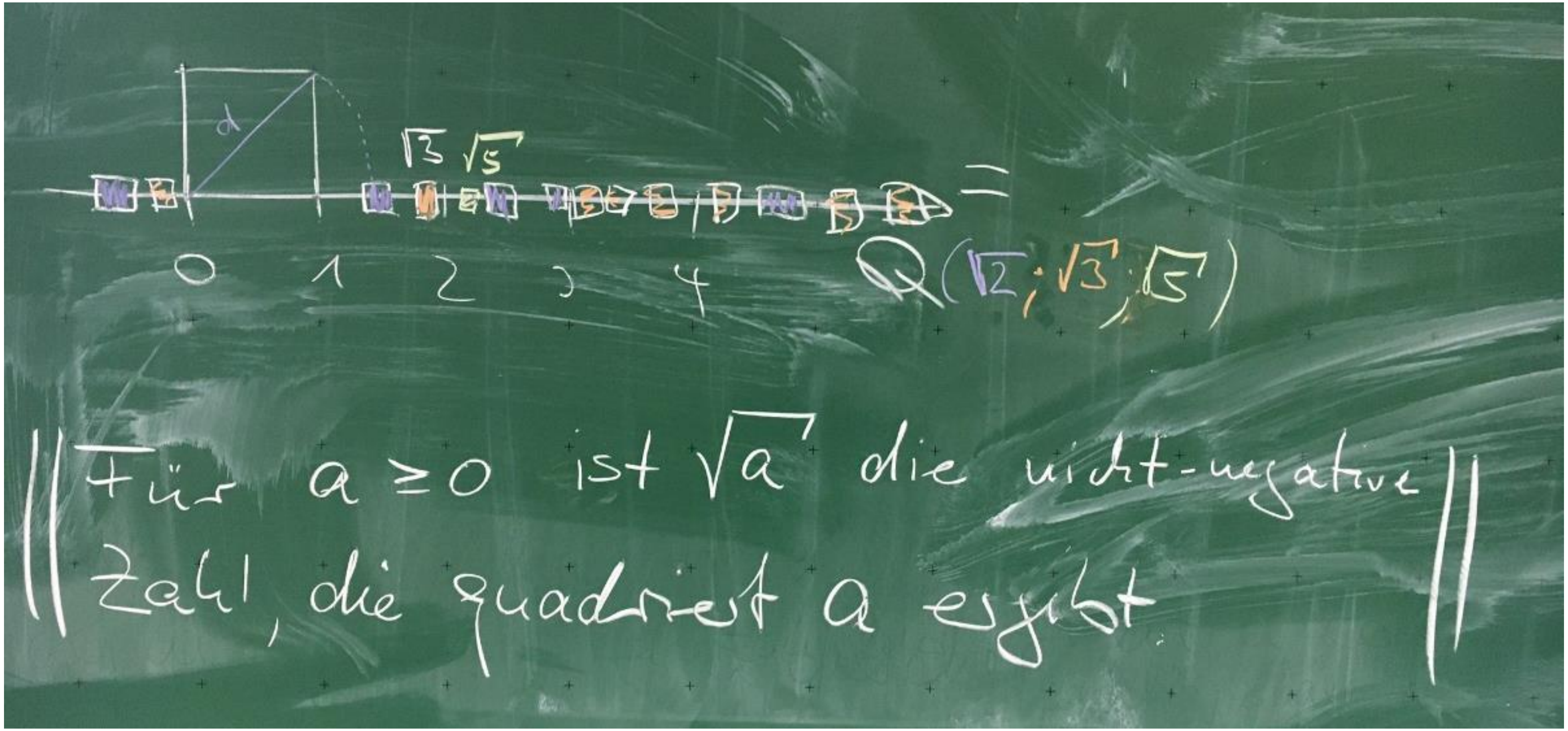
Weitere Anknüpfung an die Gruppenarbeitsergebnisse

Offen war in **4)** noch, ob es neben $\sqrt{2}$ noch weitere Wurzeln gibt.

- Q($\sqrt{3}$): analoges Vorgehen – mit der einen Lücke bei $\sqrt{3}$ findet man erneut unendlich viele neue Lücken – z.B. bei 1 + $\sqrt{3}$ oder 5·$\sqrt{3}$ - die als neue Zahlen erfunden werden müssen (immer noch Platz auf der alten Zahlengeraden, obwohl doch alles „dicht“ liegt!?)
- Erweiterung auf Q($\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$) und dann auf Q($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$) usw.
- Verallgemeinerung auf weitere Wurzeln (immer noch Platz auf der Zahlengeraden…):

Für a ≥ 0 ist $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ die nicht-negative Zahl, die quadriert a ergibt.

Veranschaulichung



Aus dem Unterrichtsgespräch zur „neuen“ Zahlengeraden

- „Hähh? Lücke mal Lücke kann doch keine Zahl ergeben!“
  … und dann später: „Ich glaube nicht mehr an die Zahlengerade!“
- „Zahlengerade macht immer noch Sinn; ein paar Zahlen gibt es darauf halt nicht…“
- „Aber es gibt ja unendlich viele Lücken… und unendlich viele Zahlen – also etwa gleich viele… - oder?“
- „Natürlich gleich viele! Es sind ja beide unendlich – also auch gleich viele! Die Zahlengerade macht noch Sinn, auch mit unendlich vielen Lücken, damit man veranschaulichen kann, wo die Zahlen liegen und auch sagen kann, welche größer und kleiner sind…“
- „Es gibt verschiedene Unendlichkeiten! Ich hab mal so was gehört. Das hat irgendwie was mit Macht zu tun, oder so. Das Unendlich von den Lücken ist größer als das Unendlich von den rationalen Zahlen!“
- „Ich bin gerade ganz durcheinander. Irgendwie seit es um unendlich geht…!“

Ordnen und Vereinfachen – Terme mit Quadratwurzeln

- Produkte von Wurzeln
- Quotienten von Wurzeln
- Teilweises Wurzelziehen
- Ausmultiplizieren
- Ausklammern…

… alles weiter wie gehabt.   - Oder doch nicht? Impuls am Nachmittag.

Überprüfungen

Auszug aus der Klassenarbeit

Theoretischer Teil

5. Erinnere dich an die alten Griechen: Alpheios hat Diokles überzeugt, dass eine Quadratverdoppelung nicht möglich ist.

a) Welche Auswirkung hat dies für d (die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat)?

b) Erkläre die Idee des von Alpheios geführten Beweises (keine Einzelheiten!).

c) Nach der Erkenntnis von Alpheios und Diokles geriet die Mathewelt ins Wanken. Als Mitglied des Clubs „Mathe-forever 8e“ sollst du eine <u>kurze begründete</u> Erklärung für die Zeitung abgeben, ob $\sqrt{2}$ überhaupt eine Zahl ist.

Welches Statement könnte man am nächsten Tag von dir in der Zeitung lesen?

Schülerlösungen

5) a) Die Diagonale d ist keine Zahl. Man kann sie nicht messen. Sie ist eine Lückenzahl. d ist keine Maßzahl.

b) Alpheios macht die Annahme: „Das ist das kleinste Stein-Quadrat, welches man aus zwei kleinen gleichgroßen Steinquadraten legen kann. Er führt vor, und am Ende gibt es wieder zwei noch kleinere Steinquadrate und ein größeres. Somit ist es ein Widerspruch: ↯

Alpheis beweist so, dass man zwei gleichgroße Quadrate nicht zu einem Einheitsquadrat legen kann.

c) Mein Statement an die Zeitung:

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl*. Selbst mit sehr komplizierten Brüchen kommt man nie genau auf $\sqrt{2}$, denn ~~an~~ dieser Stelle ist ~~wie~~ eine Lücke. ~~Es gibt noch unendlich weitere Lückenzahlen.~~

*Sie befindet sich außerhalb von $\mathbb{Q}$, also der rationalen Zahlen.

Weitere Schülerlösungen

c) „Da wir herausfanden, dass $d=\sqrt{2}$ und d durch kein Bruch dargestellt werden kann, ist $\sqrt{2}$ keine ~~für~~ uns bekannte Zahl ist. ~~Sch~~ So haben wir uns dazu entschlossen eine Zahl $\sqrt{2}$ ins System aufzunehmen. Diese Zahl soll quadriert 2 ergeben."

5c) Es gibt den Spruch „Alles ist Zahl", aber die Diagonale d im Einheitsquadrat die wir sehen konnten, konnten wir nicht als Bruch oder Dezimalzahl angeben, egal wie viele ~~Noch~~ Kommastellen. Dass heißt die Zahlengerade ist nicht dicht, es gibt unendlich viele Lücken. Diese Zahlen nennen wir ~~irrationale~~ irrationale Zahlen. Für die Lücken z.B. bei $x \cdot x = 2$ nehmen wir $\sqrt{2}$, „die Wurzel aus 2." $\sqrt{2}$ ist eine Zahl, die man jedoch nicht als Bruch oder Dezimalzahl angeben kann, eben eine irrationale Zahl.

Auszug aus der Nachschrift

5. Theoretischer Teil

a) Was meint der Mathematiker, wenn er sagt: „Die rationalen Zahlen liegen dicht.“?

b) Trägt man die rationalen Zahlen auf der Zahlengerade Q ein, so gibt es dort Lücken. Wie passt das zur Aussage in a)?

c) Tilda behauptet: „$\sqrt{2}$ ist keine Zahl!“ Fritz hält dagegen: „Das kann man so nicht sagen…“

Wie könnte dieser Dialog weitergehen?

Schülerlösung

a) Alle Zahlen liegen dicht einander, weil zwischen fast jeden zwei Zahlen im Zahlenstrahl, liegt immer noch eins dazwischen. Es gibt unendlich viele Zahlen, weil zb. nach 1,99999998... in die nachkommastellen kann man ~~sie~~ immer noch eine Zahl ranhängen.

b) Auch zwischen zwei Zahlen, können Lücken entstehen, da immer wieder eine Zahl dazwischen kommt, kann es passieren, dass an manchen Stellen Lücken auftreten können. Auf der Zahlengerade $\mathbb{Q}$ können also auch Lücken entstehen. Das kann man auch beweisen zb der Versuch von Alpheios. Er versuchte mit 2 gleichgroßen Quadraten, ein großes zu machen, doch es ging nicht. „$2a^2 \neq b^2 \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 \neq 2 \rightarrow$ „d" keine Zahl.

c) Beide haben recht. Tilda kann sagen, dass $\sqrt{2}$ auf eine Lücke im ~~Zah~~ Zahlenstrahl trifft und zb von den Quadrat „d" ~~war~~ ist auch keine Zahl. „$2a^2 \neq b^2 \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 \neq 2 \rightarrow$ „d" ist keine Zahl.

Fritz kann sagen, dass man mit $\sqrt{2}$ rechnen kann und dass es unendlich viele, nichtperiodischen nachkommastellen hat.

Gründe für die Durchführung der UR in der vorgestellten Form

- Blick über den schulischen „Tellerrand" in die Mathematik.
- Irrationale Zahlen sind rein künstliche Gebilde.
- Zahlbereichserweiterung von Q zu R läuft nicht glatt wie bei N -> Z -> Q: reine Theorie! Deshalb auch *theoretischer* Einstieg statt künstlicher Sachaufgaben bei der Einführung.
- „Erfinden" (Definieren) ist ein mathematisch legales Prinzip.
- Mathematik ist eine theoretische Wissenschaft (Geisteswissenschaft), keine Naturwissenschaft!
- Die SuS in Klasse 9 befinden sich auf dem Stand der Pythagoreer („Alles ist Zahl"), deren mathematisches Weltbild auf ähnliche Weise zerbricht…

Weitere Gründe

- Die vertraute Zahlengerade zu Q erfährt eine völlig neue (erschütternde) Sichtweise: Obwohl „dicht“, ist sie nahezu leer, sie enthält fast nur Lücken!
- Taschenrechner hat seine Grenzen und man darf ihm nicht alles „glauben“…
- Näherungswerte für irrationale Zahlen sind wirklich nur solche – genaue Angaben nur möglich durch die für sie erfundenen(!) Namen.
- Zahl(en) -gefühl…

Unser Fazit

Es lohnt…

… insbesondere für die pfiffigen Schülerinnen und Schüler, die gewinnbringende Erkenntnisse erlangen,

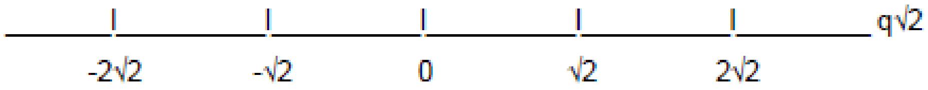
… was sich eventuell auch erst irgendwann später zeigen wird –

… und man lernt auch als Lehrkraft immer noch selbst dazu! ☺

Zum Weiterdenken…

Erstaunliche Zahlengeraden (q rational)

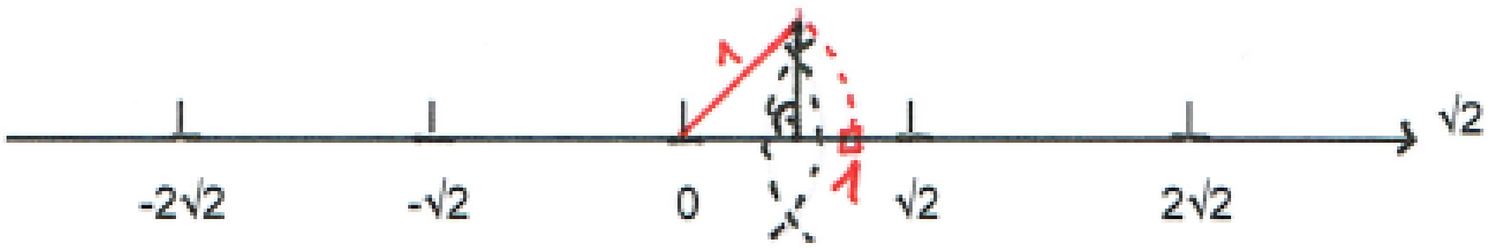
1.



- Die Zahlen liegen dicht wegen $q_1 \sqrt{2} < \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\sqrt{2} < q_2 \sqrt{2}$
- Außer 0 liegt keine rationale Zahl auf dieser Gerade!
- Es liegen keine andersartigen Wurzeln, wie etwa $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$, auf dieser Gerade!

Wo genau liegt die 1?

Lösung:



Erstaunlich: 1 erscheint hier als Lücke!

Und weiter:

2.

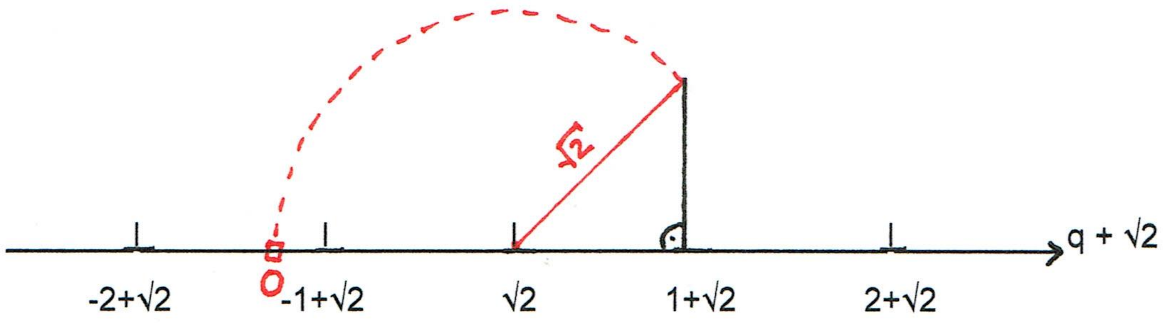
_______I__________I__________I_________I___________I_________ $q+\sqrt{2}$

$-2+\sqrt{2}$ $\quad -1+\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2+\sqrt{2}$

- Die Zahlen liegen dicht wegen $q_1 + \sqrt{2} < \frac{1}{2}(q_1 + q_2) + \sqrt{2} < q_2 + \sqrt{2}$
- Es liegt keine rationale Zahl auf der Gerade!
- Es liegen keine andersartigen Wurzeln, wie etwa $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$, auf dieser Gerade!

Wo genau liegt die 0?

Lösung:



(Nicht mehr ganz so) erstaunlich: 0 erscheint hier als Lücke!

Aus dem Lehrplan

L1: Zahl und Zahlbereiche	Empfohlener Zeitansatz: **28 Stunden**

Wurden bisher die Umkehrungen der Grundrechenarten betrachtet, so werden nun die Umkehrungen des Potenzierens thematisiert. Die Existenz der Quadratwurzel kann an geometrischen Fragestellungen entwickelt werden. Dabei sollen durch anschauliche Verfahren Einsichten in den Prozess der Annäherung gewonnen werden. Mit dem Taschenrechner werden Näherungswerte für Quadratwurzeln ermittelt; auf sinnvolle Genauigkeit ist dabei zu achten. In den Erweiterungsteilen (**E**) werden systematisch durch Iterationsverfahren Näherungswerte für Quadratwurzeln und auch für die Kreiszahl π berechnet. Im Bereich der Vertiefung (**V**) werden anhand dieser Iterationsverfahren Kennzeichen eines Algorithmus erarbeitet.

Der Nachweis der Irrationalität einzelner Quadratwurzeln wird in der Erweiterung (**E**) thematisiert und damit der Zahlbereich der reellen Zahlen eingeführt. Es bietet sich an, die bisherigen Zahlbereichserweiterungen ins Bewusstsein zu rücken und darauf hinzuweisen, dass auch mit den reellen Zahlen nicht alle Gleichungen lösbar sind (z. B. $x^2 = -1$). In der Vertiefung (**V**) wird darüber hinaus die Dezimaldarstellung reeller Zahlen untersucht.

In der Erweiterung (**E**) werden mit der Verallgemeinerung des Potenzbegriffs auch die beiden möglichen Umkehroperationen – die n-te Wurzel und der Logarithmus einer Zahl – eingeführt. Auf ausgedehnte Übungsphasen bei Potenz- und Wurzeltermen ist zu verzichten; das Rechnen mit Logarithmen beschränkt sich auf das Lösen einfacher Exponentialgleichungen, wie sie in Anwendungsbezügen auftreten (vgl. L4 „Funktionaler Zusammenhang: Nicht-lineare Funktionen“).

Kompetenzen		Inhalte	Hinweise und Vernetzung
		Quadratwurzeln – Reelle Zahlen	✐ L4: Funktionaler Zusammenhang: Nicht-lineare Funktionen
K2: Geeignete Strategien zum Problemlösen auswählen und anwenden	**B**	Quadratwurzeln durch Umkehrung des Quadrierens bestimmen oder abschätzen	Quadratzahlen bis 400 auswendig lernen Prinzip des Einschachtelns
K2: Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten K3: In dem jeweiligen Modell arbeiten K2: Die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen und die Lösungswege reflektieren K5: Mathematische Werkzeuge sinnvoll und verständig einsetzen		Sachaufgaben lösen, die auf Quadratwurzeln führen, und mit Näherungswerten sinnvoll umgehen	Z. B. zu vorgegebenem Flächeninhalt die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrates annähern Bei Verwendung des Taschenrechners auf sinnvolle Genauigkeit achten

Und weiter…

Kompetenzen		Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden	B	**Fachbegriff:** Quadratwurzel	
K5: Mit Variablen, Termen und Gleichungen arbeiten K4: Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten anwenden	E	Wurzelgesetze bei Termumformungen anwenden	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ Auch auf einschränkende Bedingungen achten Ausgedehnte Übungsphasen mit komplexen Termen sind zu vermeiden Das Rationalmachen des Nenners wird nicht verlangt L4: Terme und Gleichungen Unterscheiden zwischen dem Lösen einer reinquadratischen Gleichung und dem Wurzelziehen
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln K6: Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen		Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung begründen • irrationale Zahlen • reelle Zahlen	Exemplarisch für $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ oder Goldener Schnitt Ausgewählte Quadratwurzeln auf der Zahlengeraden darstellen Geschichte der irrationalen Zahlen Beweise in der Mathematik
K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden		**Fachbegriffe:** Irrationale Zahl, reelle Zahl, Radikand	

… und weiter…

Kompetenzen		Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K4: Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten anwenden, interpretieren und unterscheiden K1: Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und Vermutungen begründet äußern	V	Dezimaldarstellung rationaler und irrationaler Zahlen miteinander vergleichen	„Dicht-Liegen" und Mächtigkeit rationaler Zahlen auf der Zahlengeraden
		NÄHERUNGSVERFAHREN	
K2: Geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden K1: Lösungswege beschreiben und begründen K5: Mathematische Werkzeuge sinnvoll und verständig einsetzen	E	Ein Iterationsverfahren zur Bestimmung irrationaler Wurzeln begründen und ausführen	Intervallschachtelung, Heron-Verfahren 💻 Tabellenkalkulation, grafikfähiger Taschenrechner
K2: Geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden K1: Lösungswege beschreiben und begründen K5: Mathematische Werkzeuge sinnvoll und verständig einsetzen K6: Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien		Ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von π begründen und ausführen, auch mit geeigneter Software	Einsatz von Tabellenkalkulation oder Geometriesoftware L5: Daten und Zufall Monte-Carlo-Methode Geschichtliches zur Zahl π

… und weiter…

Kompetenzen		Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K3: Verwendete mathematische Verfahren reflektieren und kritisch beurteilen K5: Symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt	V	Verfahren hinsichtlich der Merkmale eines Algorithmus analysieren	Ausführbar, eindeutig, endlich → Algorithmusbegriff (Informatik)
		POTENZIEREN UND ENTSPRECHENDE UMKEHRUNGEN	L4: Funktionaler Zusammenhang: Nichtlineare Funktionen
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln K5: Mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen arbeiten K4: Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen	E	Die Erweiterung von Potenzen auf negative und gebrochene Exponenten erläutern und dabei notwendige Definitionen beachten	$a^1 = a,\ a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ Auch auf einschränkende Bedingungen achten
K4: Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen K4: Unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln		Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise darstellen und damit umgehen	Beispiele aus Makro- und Mikrokosmos Zahldarstellung auf dem Taschenrechner und Computer
K5: Mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten K4: Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten anwenden		Potenzgesetze bei Termumformungen anwenden	Ausgedehnte Übungsphasen sind zu vermeiden
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln K5: Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen		Zusammenhänge zwischen Potenzieren, Wurzelziehen und Logarithmieren erkennen, interpretieren und nutzen	Zwischen Lösung(en) der Gleichung $x^n = a$ und $\sqrt[n]{a}$ unterscheiden $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (für a, b ≥ 0 und a ≠ 1)

Klassenstufen 9 und 10 (Mittlerer Schulabschluss) 87

… und weiter:

Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden	**E** **Fachbegriffe:** Potenz, Basis, Exponent n-te Wurzel, Logarithmus	
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln	**V** Die Gültigkeit eines Potenzgesetzes für rationale Exponenten begründen	
K1: Mathematische Argumentationen entwickeln	Das Logarithmengesetz $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ begründen	L4: Funktionaler Zusammenhang (Exponentialfunktionen)

Klassenstufen 9 und 10 (Mittlerer Schulabschluss) 88