Nichtstandardanalysis

Motivation

- Grenzwertbegriff entfällt
- Hyperreelle Zahlen kommen den intuitiven Vorstellungen der SuS entgegen
- Regeln können errechnet werden (und müssen nicht erst erraten und dann bewiesen werden)
- knüpfen an die historischen Wurzeln der Entstehung der Analysis an

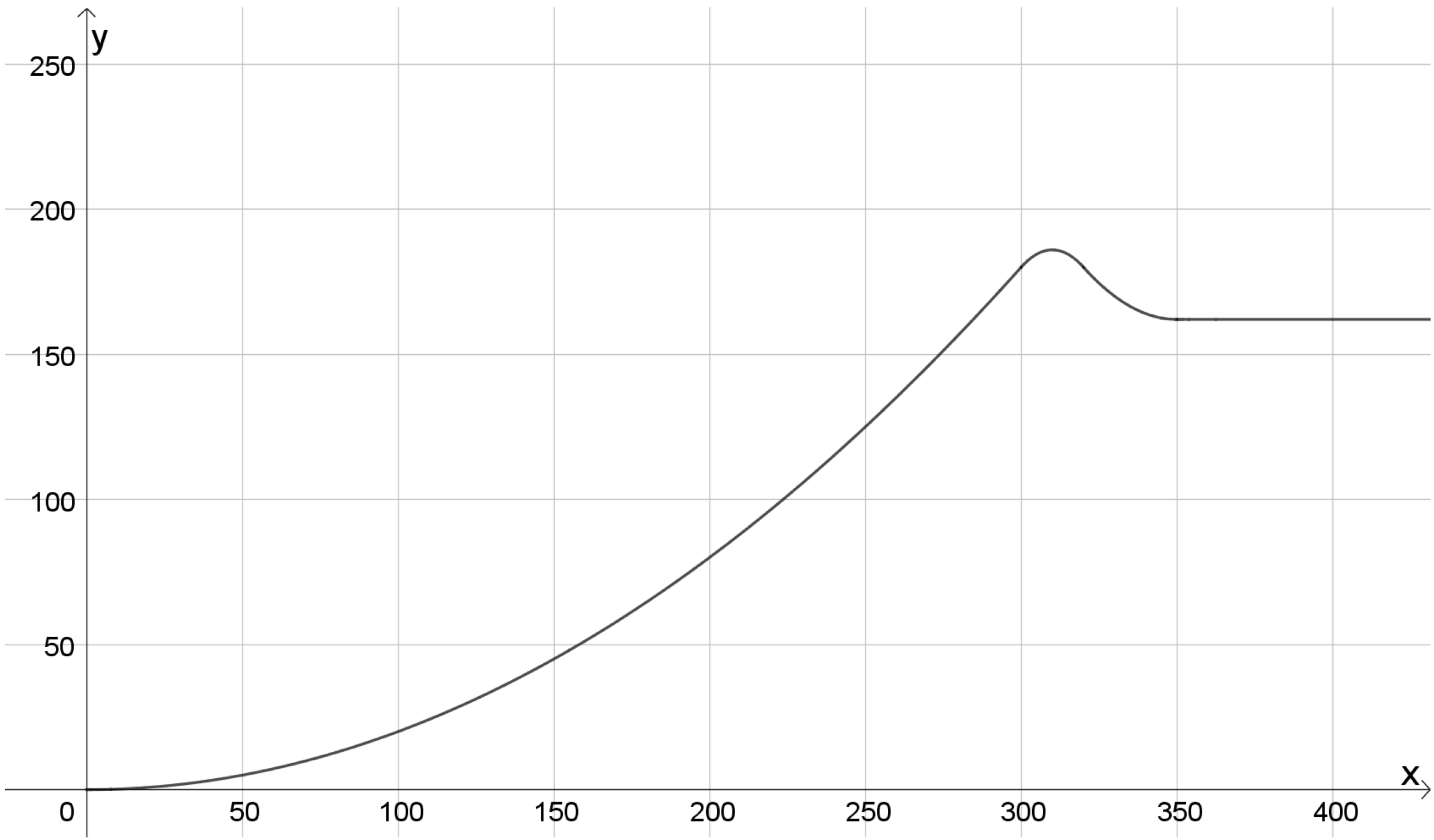
(Baumann; Kirski)

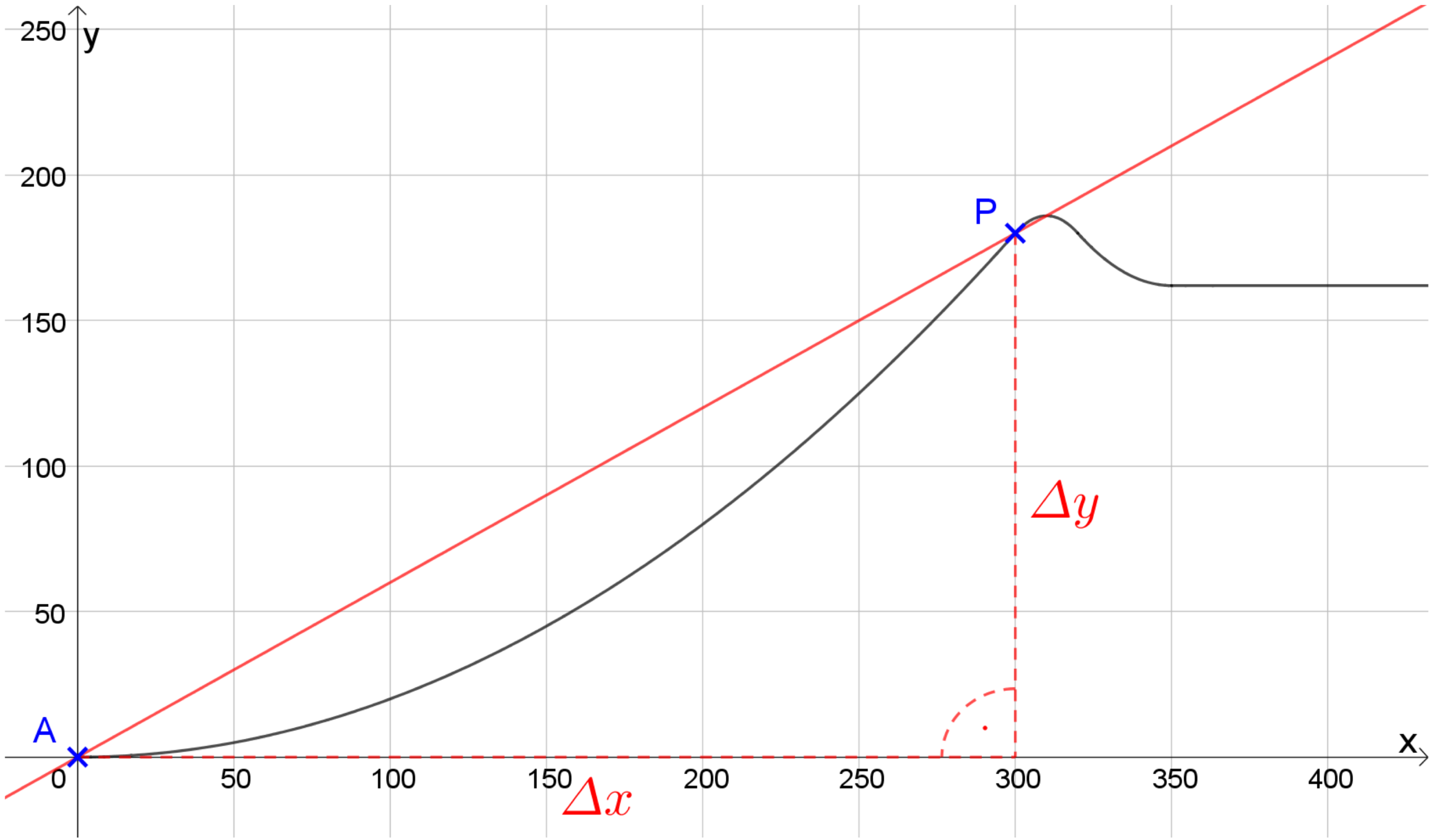
Unterrichtsgang

Zugang über:

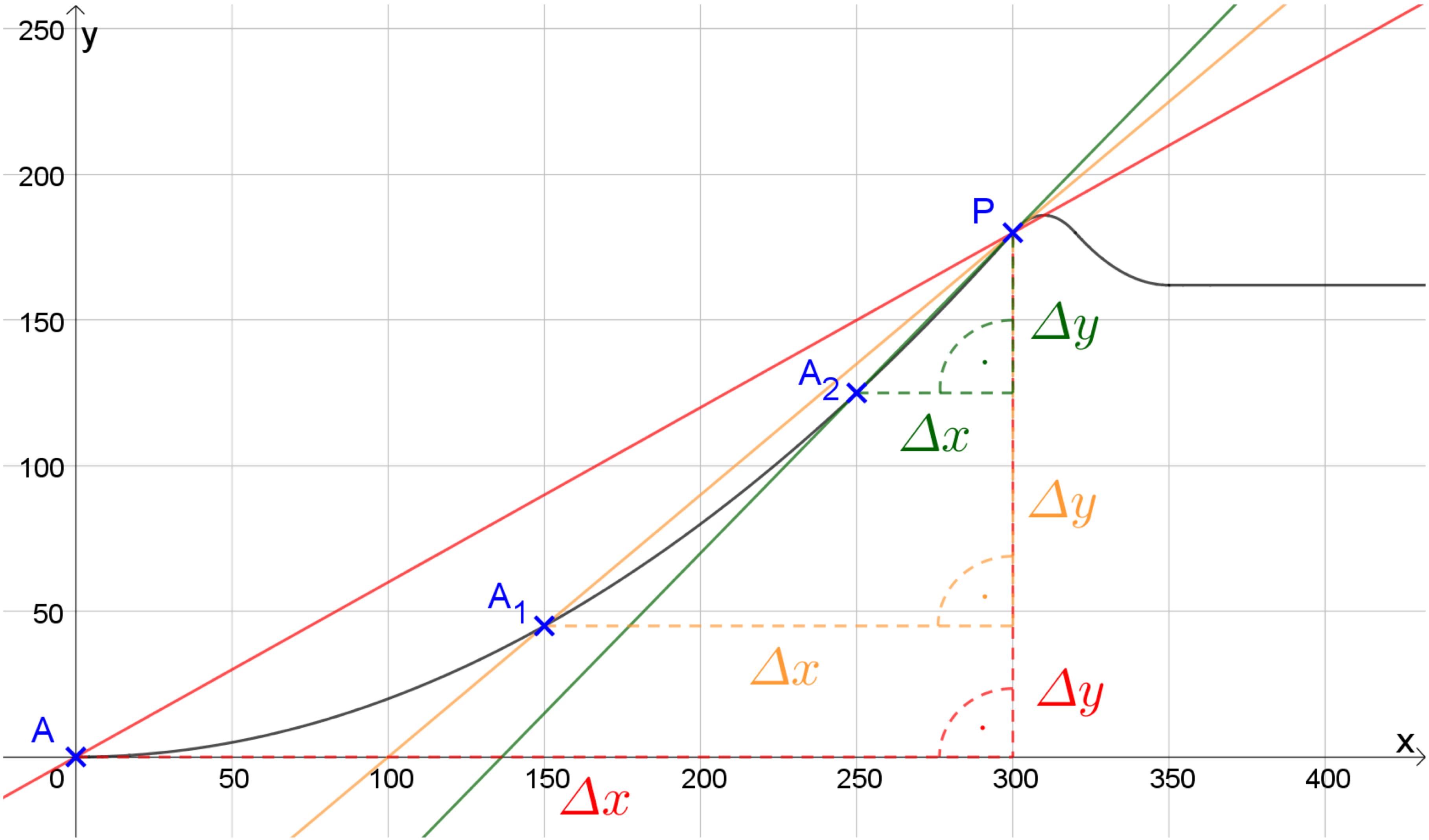
- Mittlere zur momentanen Änderungsrate
  → Badetag
- Sekanten- zur Tangentensteigung → Krater

$$k(x) = 0{,}002x^2$$

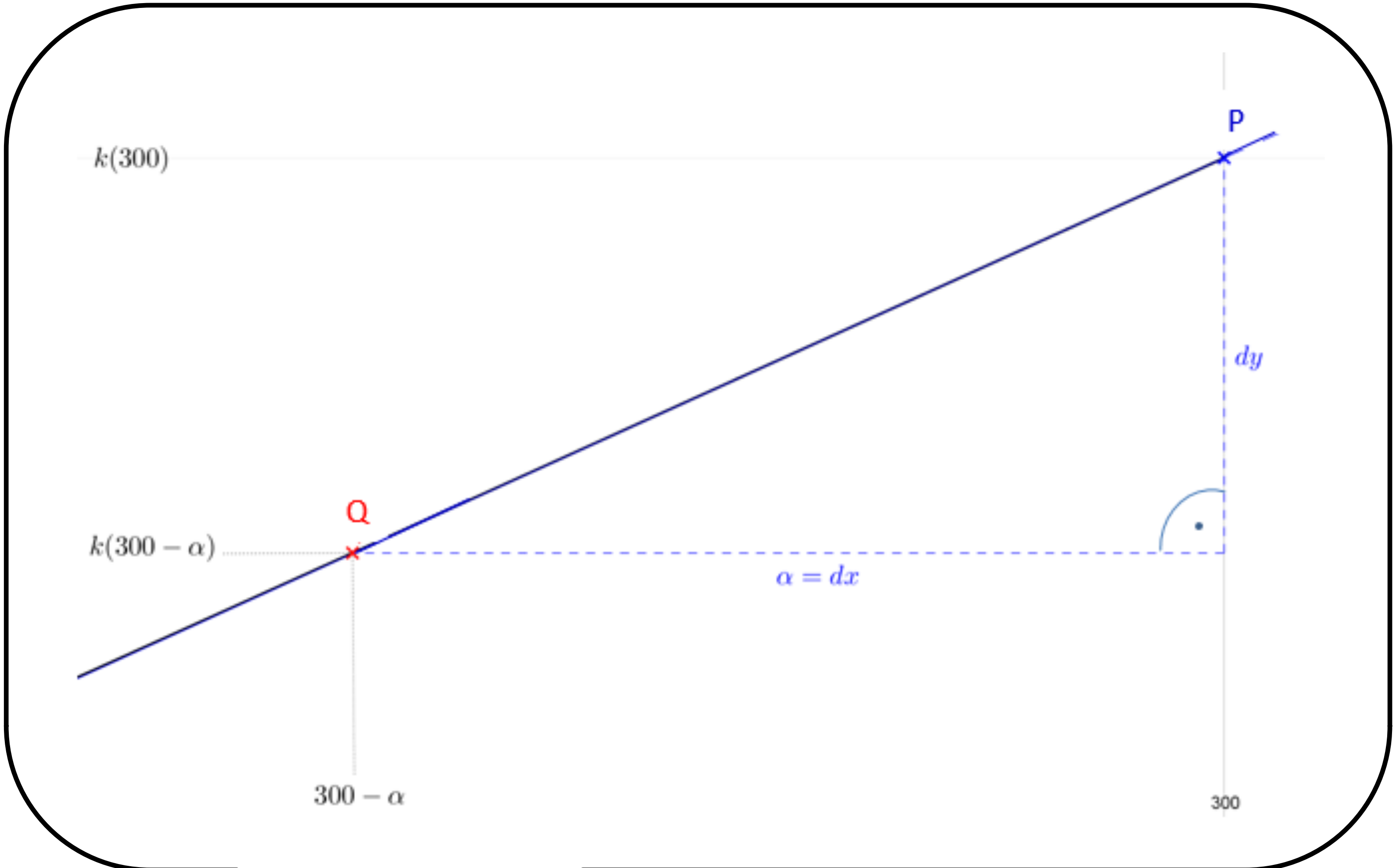


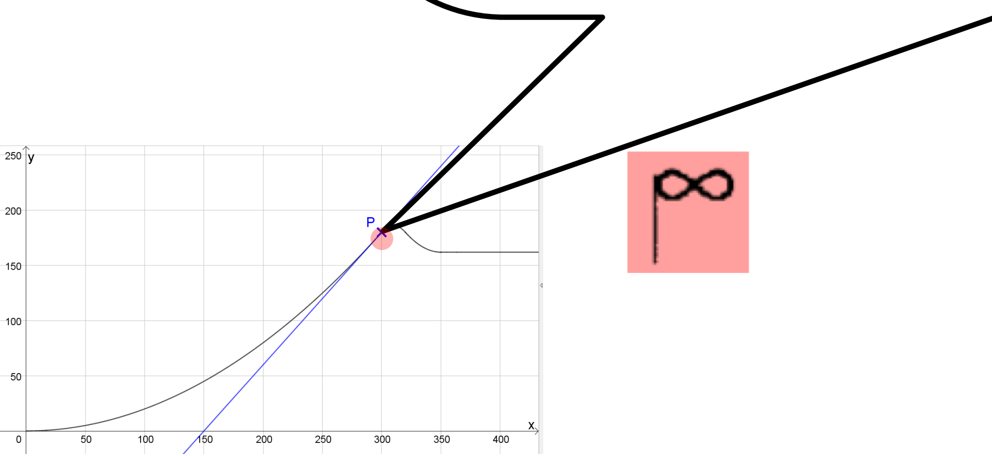


y
x
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
A
P
Δy
Δx



y
x
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
P
A
A1
A2
Δy
Δx
Δy
Δx
Δy
Δx





https://www.geogebra.org/m/VNbhnUtq

$1 > 0,\overline{9}$?

- $0{,}999\ldots = 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$
- Man findet keine reelle Zahl, die man zwischen $0,\overline{9}$ und 1 „setzen“ kann.
- <u>SuS:</u> „Mathematisch ist $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$, da man aber unendlich viele 9er Stellen hintendran stellen kann, ist diese Zahl immer kleiner als 1.“ (Bedürftig)

  Bauer: 72 % aller Schüler

  50 % aller Studierenden nach Ana I und II

→ Unvollkommenheit der Zahlenfolge 0,9; 0,99; 0,999; …

→ Unverständnis des Grenzwertbegriffs / Kluft zwischen Grenzwert und Zahlenfolge

- $\longrightarrow$ Entgegenwirken durch Zahlbereichserweiterung
- $\longrightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset /H$ (in Literatur auch oft $^{*}\mathbb{R}$) (**hyperreelle Zahlen**)

Definition:

Jede Folge reeller Zahlen ist die Darstellung einer **HYPERREELLEN ZAHL ($\mathbb{H}$)**.

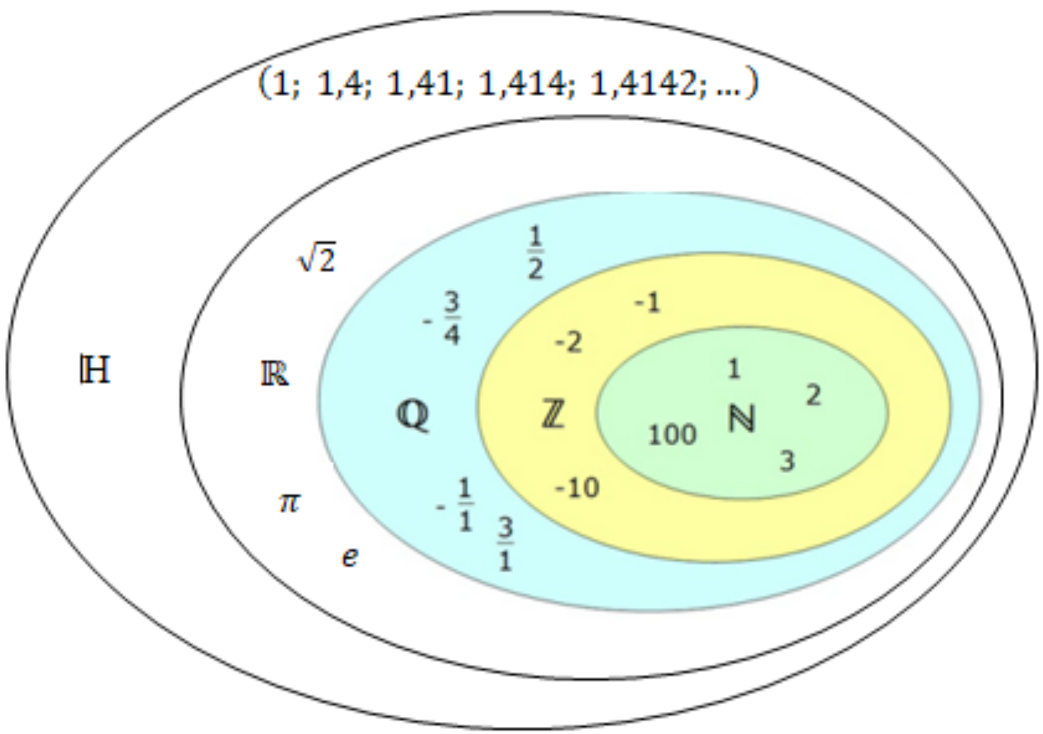
Die hyperreelle Darstellung einer reellen Zahl ist eine konstante Folge.

Bsp.: $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}; \dots) \in \mathbb{H} \mathrel{\widehat{=}} \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$(1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1; \dots) \in \mathbb{H} \mathrel{\widehat{=}} 1 \in \mathbb{R}$

Alle anderen hyperreellen Zahlen besitzen im Reellen keine Darstellung.

Bsp.: $(1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142; \dots) \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ (hyperreelle Zahlen ohne reelle Zahlen)



Vergleich erfolgt gliedweise:

Bsp.: $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \ldots\right) > (1; 1{,}4; 1{,}41; \ldots)$

Rechnen erfolgt gliedweise und analog zum Rechnen mit reellen Zahlen.

$1 > 0,\overline{9}$?

Der Unterschied beider Folgen ist:

a	1,0	1,00	1,000	1,0000	...
b	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
a - b = α	0,1	0,01	0,001	0,0001	... $\epsilon/H \setminus \mathbb{R}$

α ist **„unendlich klein“** (im positiven Sinne), d.h. es gibt keine positive reelle Zahl r, die kleiner ist als α und auch keine negative reelle Zahl r, die größer ist als α.

Man schreibt $\alpha < |r|$ für jedes beliebige $r \in \mathbb{R}$

$\alpha \ \epsilon/H \setminus \mathbb{R}$ nennt man eine **INFINITESIMALZAHL**.

Jede (finite) hyperreelle Zahl *b* lässt sich aus einer reellen Zahl und einer Infinitesimalzahl zusammensetzen:

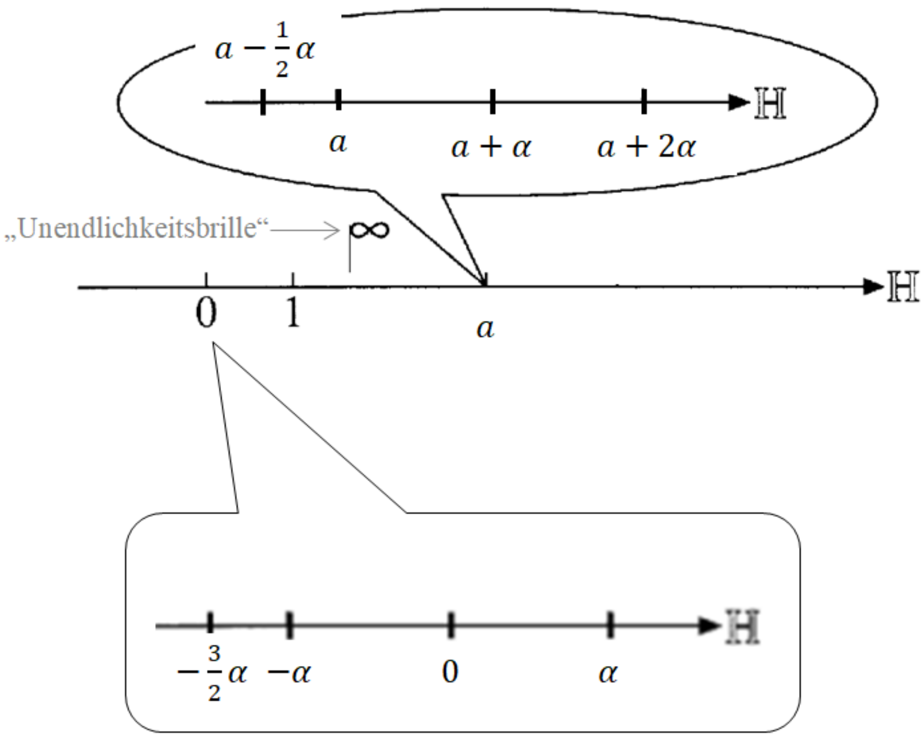
$$b = a + (-\alpha) \qquad (Bsp.{:}\ 0,\bar{9} = 1 - \alpha)$$

a nennen wir den **<u>reellen Teil</u>** von b und es gilt:

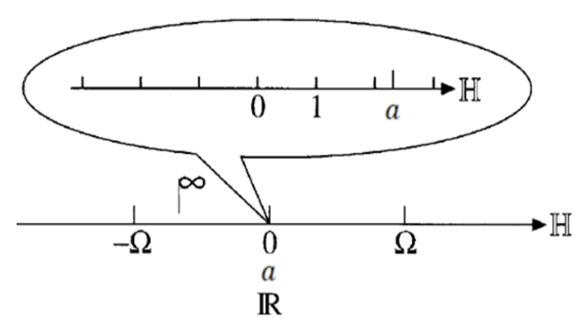
$$b = a + (-\alpha) \approx a \qquad (\text{Bsp.: } 0,\bar{9} = 1 - \alpha \approx 1)$$

infinitesimales Runden
auf die nächste reelle Zahl

Darstellung von Infinitesimalzahlen am Zahlenstrahl

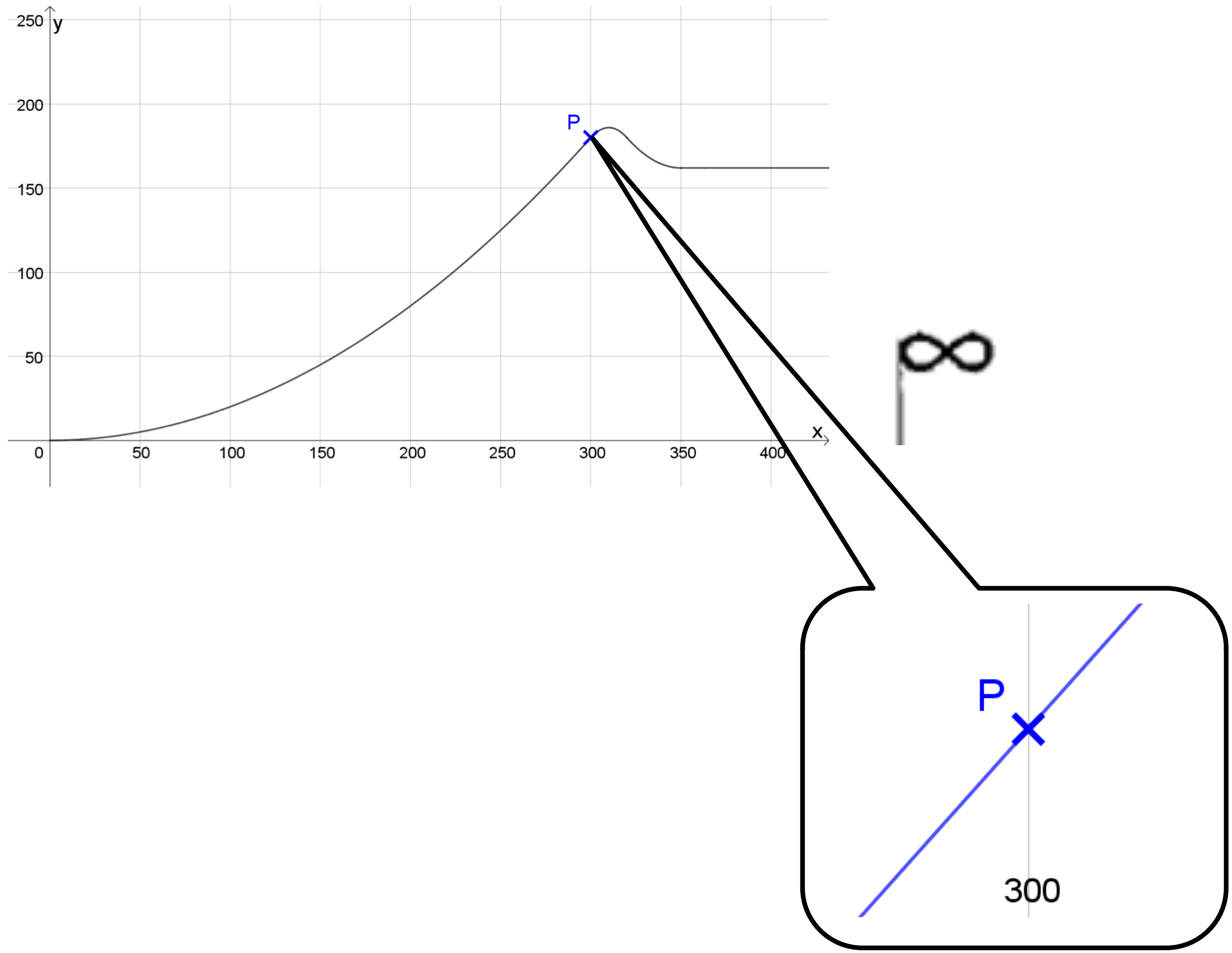


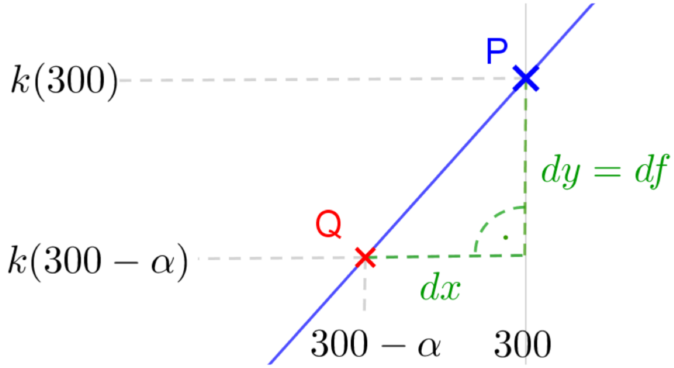
Darstellung von infiniten hyperreellen Zahlen am Zahlenstrahl



- Rechentabellen

Rückgriff: Ausgangsproblem





$$m = \frac{k(300) - k(300-\alpha)}{300 - (300-\alpha)} = \frac{0{,}002 \cdot 300^2 - 0{,}002 \cdot (300-\alpha)^2}{\alpha} = \frac{1{,}2\alpha - 0{,}002\alpha^2}{\alpha} = 1{,}2 - 0{,}002\alpha \approx 1{,}2$$

$\Longrightarrow$ Das Fahrzeug kann den Kraterrand nicht erreichen.

Die **Steigung des Graphen in einem Punkt** entspricht der **Steigung der Tangente** an den Graphen **in diesem Punkt**.
Ein Graph besitzt genau dann in einem Punkt eine Tangente, wenn er bei Vergrößerung mit einem infiniten Faktor als Gerade erscheint. Funktionen, deren Graphen diese Eigenschaft besitzen, nennt man **DIFFERENZIERBAR**.

Zwei infinitesimal benachbarte Punkte P und Q unterscheiden sich in x-Richtung um einen infinitesimalen Wert, den man **Differential** nennt und mit $\boldsymbol{dx}$ bezeichnet (historisch). Entsprechend unterscheiden sich die zugehörigen y-Werte um das **Differential** $\boldsymbol{dy = df}$. Ist $dx \neq 0$, so kann man zur Berechnung der Steigung den **DIFFERENTIALQUOTIENTEN** aufstellen: $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$.

Ist eine Funktion an einer bestimmten Stelle differenzierbar, so besitzen dort alle möglichen Differentialquotienten **denselben reellen Teil**. Diesen reellen Teil aller Differentialquotienten an einer bestimmten Stelle x nennt man die **1. Ableitung** der Funktion an dieser Stelle und schreibt $\boldsymbol{f'(x)}$**.**

Ausblick

Stetigkeit

- Klassische ε-δ-Definition der Stetigkeit von f im Punkte a:

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

- Nichtstandard-Version:

f stetig in $a := \forall x_* \in^* \mathbb{R}^*: x_* \approx a \Rightarrow f(x_*) \approx f(a)$

Anschaulich: Eine unendlich kleine Abänderung der Variablen bewirkt höchstens eine unendlich kleine Abänderung der Funktion selbst.

Quelle: http://users.minet.uni-jena.de/~bezi/Materialien/wieczorek100215_nonstandAnalysisNEU.pdf, 08.10.2017

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

$$= \frac{x^2+2xdx+dx^2-x^2}{dx}$$

$$= 2x + dx$$

$$\approx 2x = f'(x)$$

kein Variablenwechsel mehr notwendig

Ausblick

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{g(x+dx)+h(x+dx)-g(x)-h(x)}{dx}$$

$$= \frac{g(x+dx)-g(x)}{dx} + \frac{h(x+dx)-h(x)}{dx}$$

$$\approx g'(x) + h'(x)$$

Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x); \quad g, h\ stetig\ diff'bar$

Vereinfachung: $g(x) \coloneqq g; h(x) \coloneqq h$

$$\frac{d(g \cdot h)}{dx} = \frac{(g+dg)\cdot(h+dh)-g\cdot h}{dx}$$

$$= \frac{g\cdot h+g\cdot dh+h\cdot dg+dg\cdot dh-g\cdot h}{dx}$$

$$= g \cdot \frac{dh}{dx} + h \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{dg\cdot dh}{dx}$$

$$\approx g \cdot h' + h \cdot g'$$

keine „Kunstgriffe“ nötig

Ausblick

Verhalten gebrochenrationaler Funktionen im Unendlichen und an Definitionslücken

$$f(x) = \frac{3x^2+2x}{x^2}; \qquad f(\Omega) = \frac{3\Omega^2+2\Omega}{\Omega^2} = \frac{3\Omega^2}{\Omega^2} + \frac{2\Omega}{\Omega^2} = 3 + \frac{2}{\Omega} \approx 3$$

$$g(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

$$g(3+\alpha) = \frac{9+6\alpha+\alpha^2-6-2\alpha-3}{\alpha} = \frac{4\alpha+\alpha^2}{\alpha} = 4+\alpha \approx 4$$

$$h(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

$$h(2+\alpha) = \frac{(2+\alpha)^2}{2+\alpha-2} = \frac{4+4\alpha+\alpha^2}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} + 4 + \alpha = \Omega$$

$$h(2-\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2-\alpha-2} = \frac{4-4\alpha+\alpha^2}{-\alpha} = -\frac{4}{\alpha} + 4 - \alpha = -\Omega$$

Bisherige Erfahrungen

Resultate

Durchführung eines Tests am Ende der Unterrichtseinheiten

Auswertung:
Bearbeitung von Aufgabe 3: Beweis für Grenzwerte einer unstetigen Funktion an Unstetigkeitsstelle

Unterschiede:

- Control Group: ca. ein Drittel der Schüler versucht die Aufgabe nicht
- Experimental Group: ca. 6 Prozent versuchen die Aufgabe nicht

Quelle: http://users.minet.uni-jena.de/~bezi/Materialien/wieczorek100215_nonstandAnalysisNEU.pdf, 08.10.2017

Lehrplan: Grenzwerte

Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist es, eine inhaltliche Vorstellung des Grenzwertbegriffs bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken, eine ihrer Leistungsfähigkeit angemessene Präzisierung der Definition zu erreichen und sie zu befähigen, Grenzwerte zu bestimmen.

Der Lehrplan ermöglicht verschiedene Zugänge zum Grenzwertbegriff:
Der Grenzwertbegriff kann anhand reeller Funktionen ohne vorherige Behandlung von Zahlenfolgen erarbeitet werden. Bei diesem Vorgehen wird der Folgengrenzwert zu einem späteren Zeitpunkt in einem geeigneten Zusammenhang, z.B. bei der Betrachtung des Grenzwerts für $x \to x_0$, angesprochen, damit er für Anwendungen und zum weiteren Aufbau der Analysis (etwa für die Einführung der Integralrechnung) zur Verfügung steht.

Ein anderer Weg über Zahlenfolgen baut auf Vorkenntnissen aus der Sekundarstufe I auf. An eine extensive Behandlung von Zahlenfolgen und deren Eigenschaften ist nicht gedacht. Da sich rekursive Folgen in besonderer Weise eignen, ein Verständnis des Grenzwertbegriffs zu entwickeln, und ferner Rekursionen in den Anwendungen der Mathematik eine immer größere Bedeutung gewinnen, ist ein Eingehen auf diese Folgen im Unterricht ausdrücklich gefordert.

Im Zusammenhang mit der Reflexion über Grenzprozesse können historische Aspekte (Ringen um eine Präzisierung grundlegender Begriffe) und philosophische Ausblicke (Erfahrungen mit dem Infiniten) in den Unterricht einbezogen werden. Es bieten sich aber auch Beispiele aus der fraktalen Geometrie (Kochkurve, Sierpinsky-Dreieck,...) an.