Arbeitsblatt

Hyperreelle Zahlen: Übungen

Info: Ω=(1; 2; 3; …) und α=(0,1; 0,01; 0,001; …)

1. Entscheide, ob die Folgen reelle oder nicht reelle (hyperreelle) Zahlen beschreiben:

   a) $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots)$ und (0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; …)

   b) $(\pi; \pi; \pi; \pi; \ldots)$ und (3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; …)

   c) $(\frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \ldots)$ und (0,1; 0,10; 0,100; 0,1000; …)

   d) Bilde die ersten vier Glieder der jeweiligen Differenzenfolge der Beispiele a)-c). Was fällt auf?

2. Welche der folgenden Zahlen sind a) infinitesimal b) reell c) finit d) infinit:

   $9{,}1 - 10\,\alpha$; $\Omega - 100$; $\frac{1}{3} + \alpha^2$; $\frac{1}{\Omega}$

Fortsetzung folgt…

Schüleräußerungen

- Schüler kommt 14 Minuten zu spät zum Unterricht.
  Frau Hahn: Oh, haarscharf; du weißt, ab 15 Minuten gibt es eine Fehlstunde!
  Schüler: Ja, sorry, ich weiß: Das war schon infinitesimal benachbart zur 15!

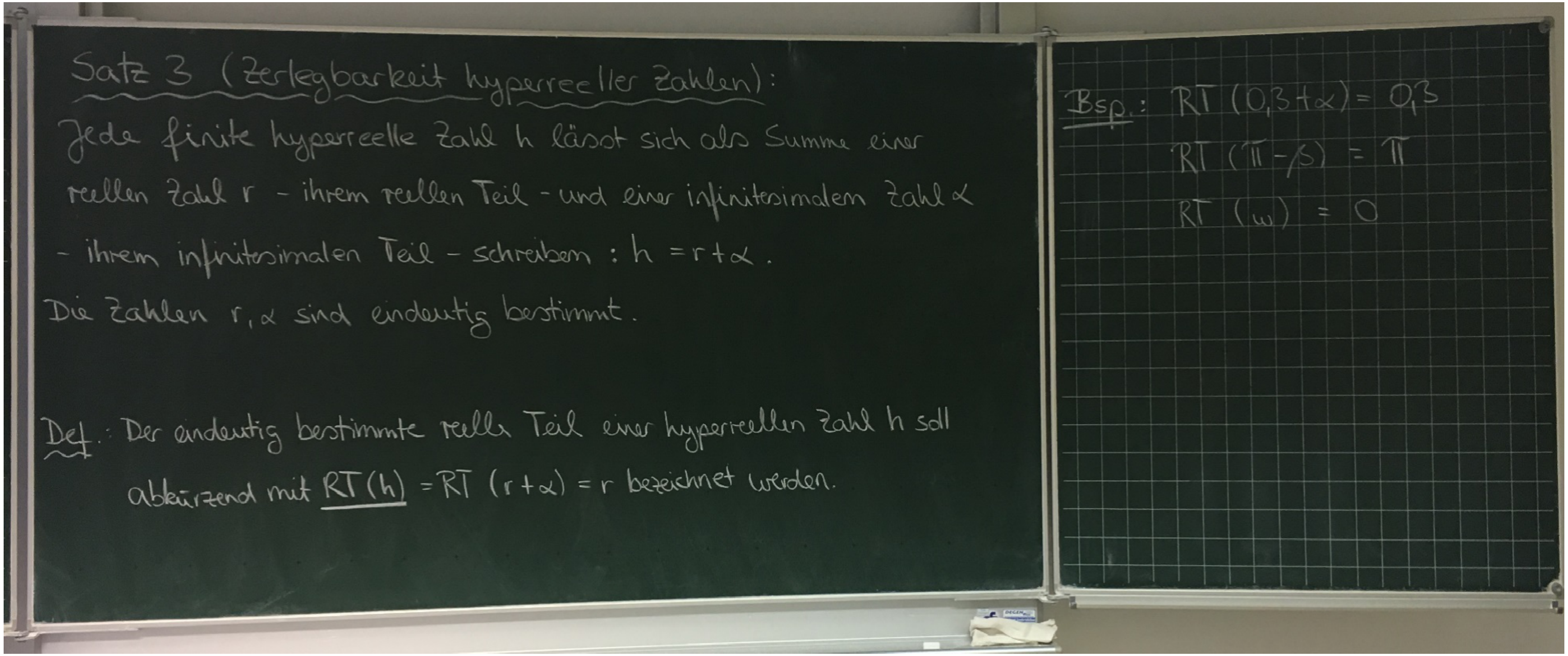
→ Der Unterricht trägt Früchte…! ;-)

Zu den Differenzenfolgen in 1a und 1b: Was fällt auf?

- Beim Subtrahieren merkt man, dass sich die Zahlen langsam auffressen; aber halt nicht ganz.

Zu Nr. 2: Ω -100:

- Eine infinite Zahl wächst ja in sich schon über alle Grenzen hinweg. Da kann ich ruhig 100 abziehen oder noch viel viel mehr. Die Zahl bleibt auf jeden Fall infinit.


Satz 3 (Zerlegbarkeit hyperreeller Zahlen):
Jede finite hyperreelle Zahl h lässt sich als Summe einer
reellen Zahl r - ihrem reellen Teil - und einer infinitesimalen Zahl α
- ihrem infinitesimalen Teil - schreiben : h = r+α.
Die Zahlen r, α sind eindeutig bestimmt.
Def.: Der eindeutig bestimmte reelle Teil einer hyperreellen Zahl h soll
abkürzend mit RT(h) = RT (r+α) = r bezeichnet werden.
Bsp.: RT (0,3+α) = 0,3
RT (π − β) = π
RT (ω) = 0

Fortsetzung Arbeitsblatt

3. Bestimme jeweils den Realteil RT von

   a) $-7 + 2\alpha$; b) $2{,}3\,\Omega$; c) $\frac{2}{9}\alpha$; d) $10\,\alpha + 9\,\beta$ mit $\beta \approx 0$

4. a) Berechne $x = (3 + 2\alpha)(1 - \alpha)$.

   b) Um welche Art Zahl handelt es sich?

   c) Gib RT(x) an.

5. Berechne:

   a) $\omega = \frac{1}{\Omega}$; b) $A = \frac{1}{\alpha}$; c) $(0{,}51; 0{,}501; 0{,}5001; \ldots) : 3$

   d) $(1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots) - (1{,}4;\ 1{,}41,\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots)$

   e) $\Omega \cdot 2\alpha$

6. Berechne $y = \frac{(1+\alpha)^2 - 1}{\alpha}$ und bestimme RT(y).

Schülerantworten

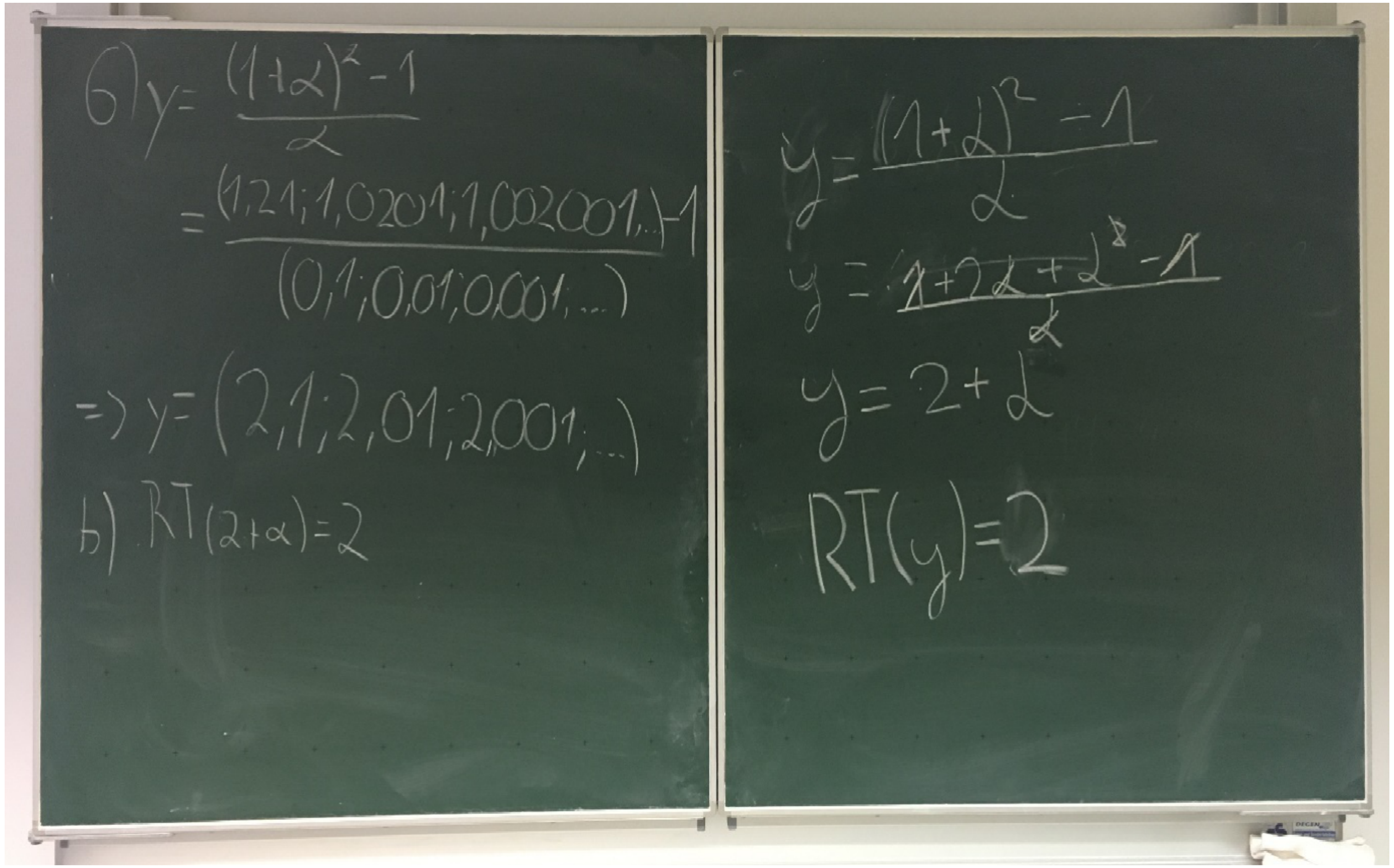
Zu Nr. 3d: $\mathrm{RT}(10\alpha + 9\beta)$:

- Der Realteil ist Null. Man kann sich das wieder wie auf der Zahlengeraden denken: Egal, wie oft man α und β addiert, die einzige reelle Zahl, die man sieht, ist die Null.

Zu 5c: Ergebnis: (0,17; 0,167; 0,1667; …)

- Was ist das? Der infinitesimale Nachbar zur reellen Zahl $0{,}1\overline{6}$? Oder ist $0{,}1\overline{6}$ selbst schon gar keine reelle Zahl, sondern hyperreell? Aber die Zahl hier ist ja doch benachbart zu irgendwas, es ist ja nicht einfach (0,1; 0,16; 0,166; 0,1666;…). Das ist ja hier schon was anderes – oder?

Schülerlösungen zu Nr. 6:



Lineare Funktionen

- Wiederholung aus Klasse 10
- Differenzenquotient
- Steigung

Einführung des Ableitungsbegriffs

- Mittlere Steigung/ Mittlere Geschwindigkeit
- Verschiedene Übungen; u.a.:

7. Bogenschießen

Die Sehne eines Bogens beschleunigt den Pfeil auf einer Strecke von 0,6 m angenähert nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 1500\,t^2$. (t: Zeit in s; s: Strecke in m)

a) Wie lange dauert der Vorgang?

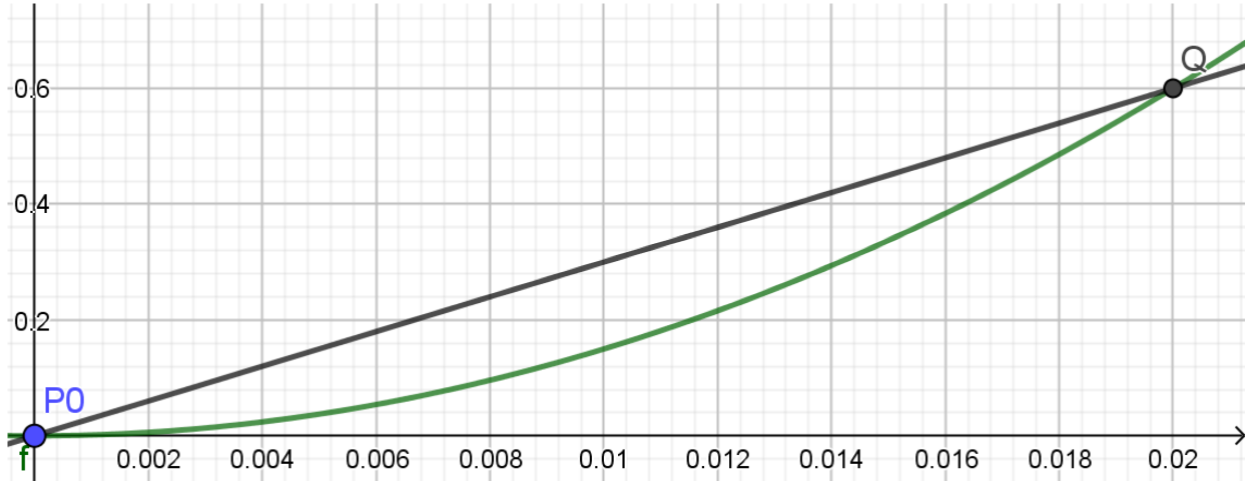
b) Welche mittlere Geschwindigkeit erreicht der Pfeil? Die Endgeschwindigkeit ist übrigens doppelt so groß.

Arbeitsblatt

Bogenschießen

Der Pfeil aus Aufgabe S. 100, Nr. 7 erreicht in den ersten 0,02 s eine mittlere Geschwindigkeit von $30\ \frac{m}{s}$.

Es wird behauptet, dass die Endgeschwindigkeit des Pfeils doppelt so groß ist. Kann das sein?



Idee: Intervalle verkleinern

	Mittlere Geschwindigkeit im Intervall [t ; 0,02]
	m=

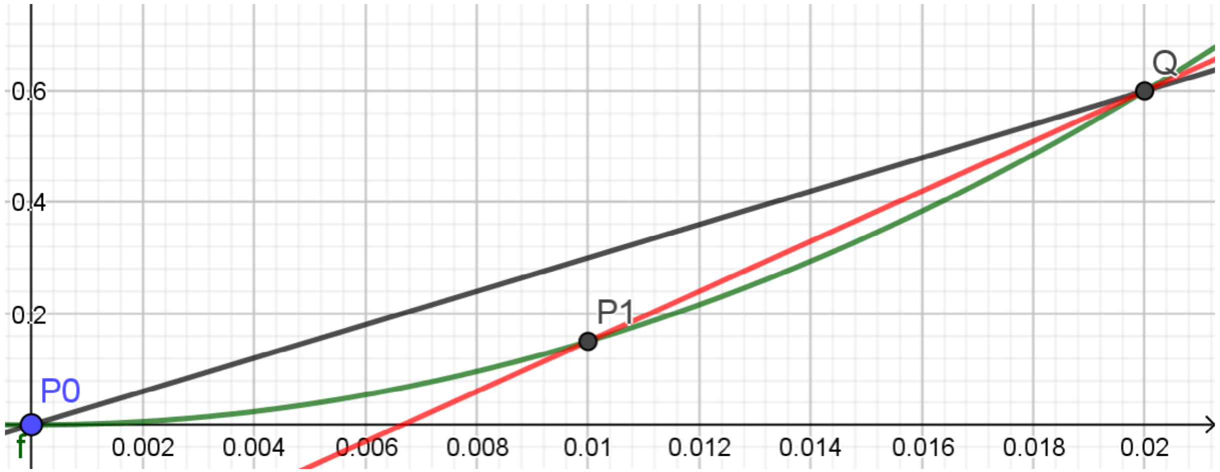
Und jetzt?

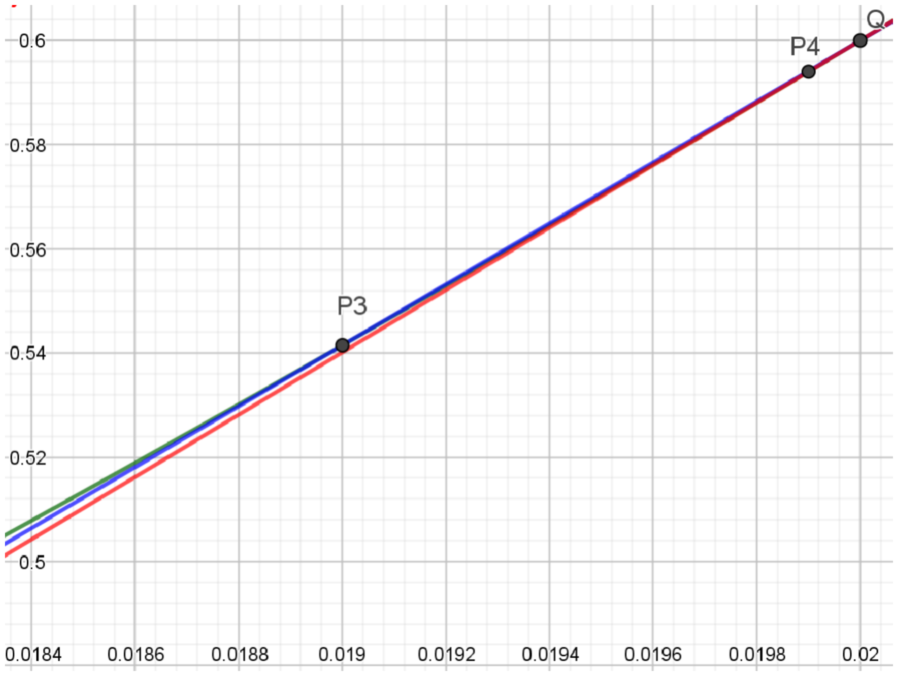
Schüleräußerungen

- Wir müssen einfach nur vom Punkt Q die Steigung ausrechnen.
- Wir brauchen kleinere Intervall, dann wird´s genauer!
- Wir müssen das Intervall unendlich klein machen.
- Es müsste infinitesimal benachbart zu t = 0,02 sein.
- Der Herr Fuhrmann ist heute nämlich wieder dabei und der hat so einen Sensor für Infinitesimalien!
- Die Endgeschwindigkeit wird nie 60; sie nähert sich ja nur infinitesimal an. Das ist ja dann noch nicht genau.

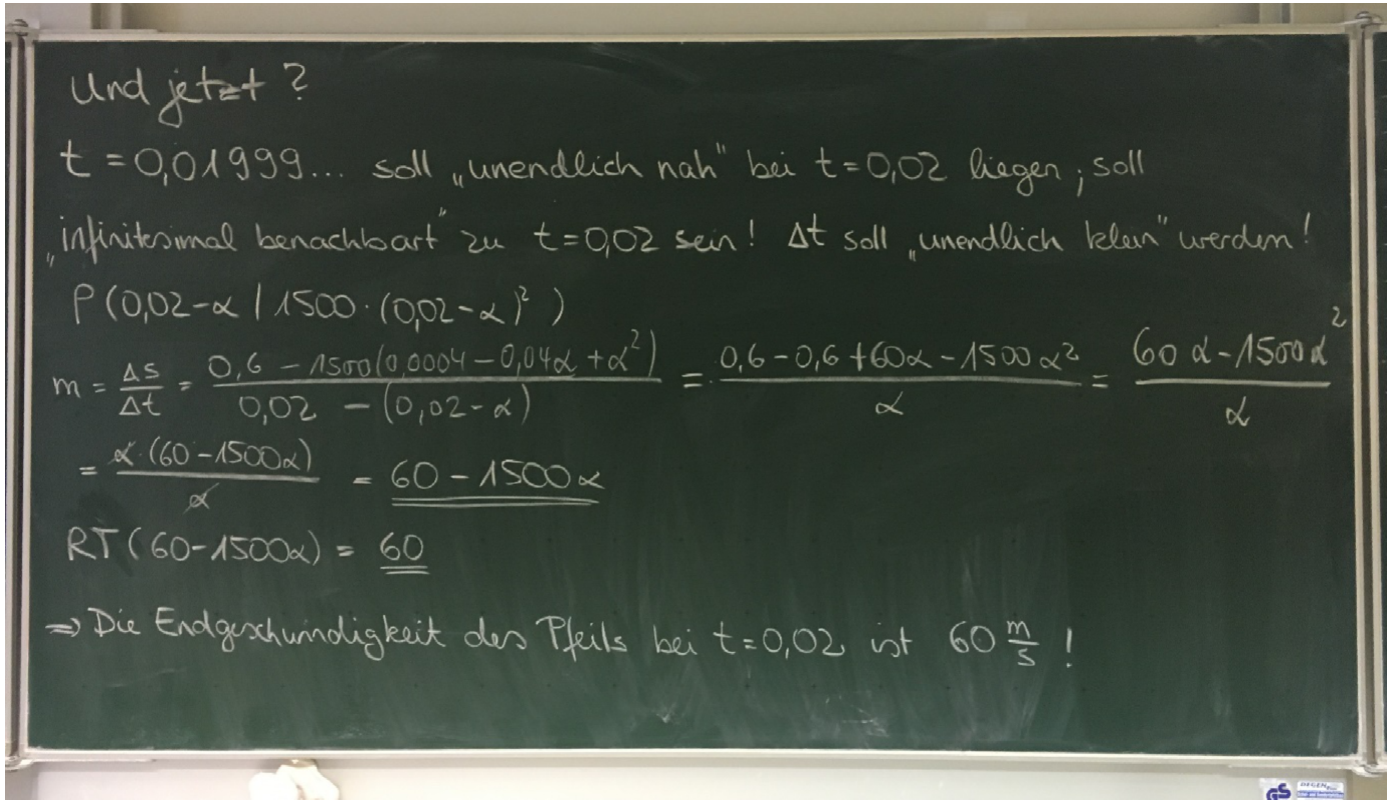
Folie

graphisch…





… und rechnerisch



Arbeitsblatt

Übung: Ermittle die lokale Änderungsrate von f an der Stelle x_0=2.

Gegeben: $f(x) = 0,5x^2$.

Die mittlere Änderungsrate dieser Funktion nimmt auf Intervall [0;2] den Wert 1 an, ermittelt aus der Steigung der Sekante durch die Punkte P_0(0/0) und Q (2/f(2)) des Graphen von f(x).

Strategie: Lass den Punkt P_0 längs des Graphen von f(x) über P_1, P_2, … immer dichter an Q heranrücken…

	mittlere Änderungsrate im Intervall [x;2]

Problem: … Wir müssten „unendlich" dicht an Q heranrücken können …

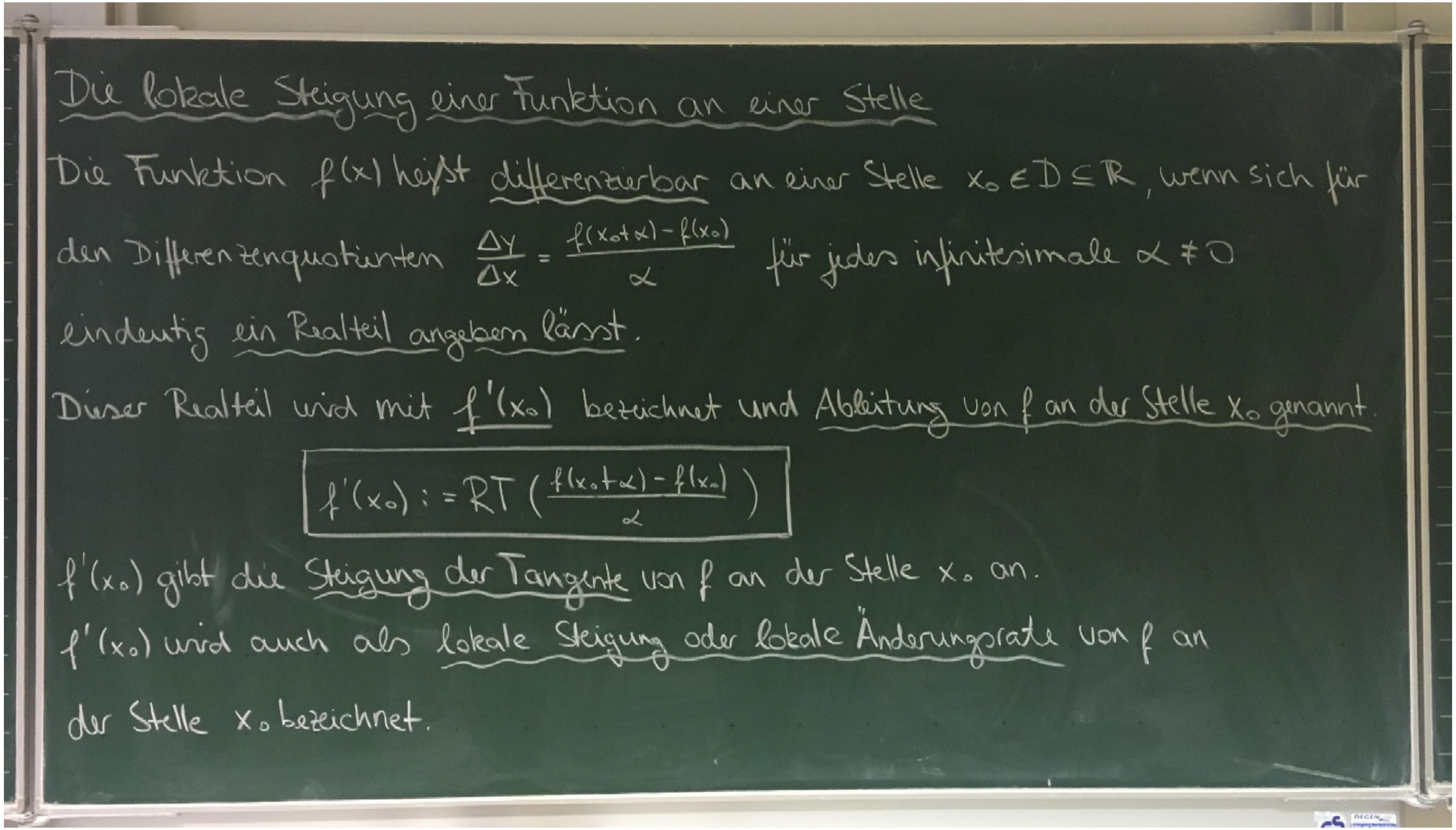
Lösung: Wir begeben uns mit P in eine infinitesimale Umgebung um Q und berechnen:

$$m = \frac{f(2)-f(2-\propto)}{2-(2-\propto)} =$$

Die gesuchte lokale Änderungsrate ist dann der Realteil der finiten Zahl m,

also RT ( ) =

Zeichne den Graphen f(x) in ein Koordinatensystem ein und veranschauliche darin die mittlere Änderungsrate auf dem Intervall [0;2] sowie die lokale Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$.



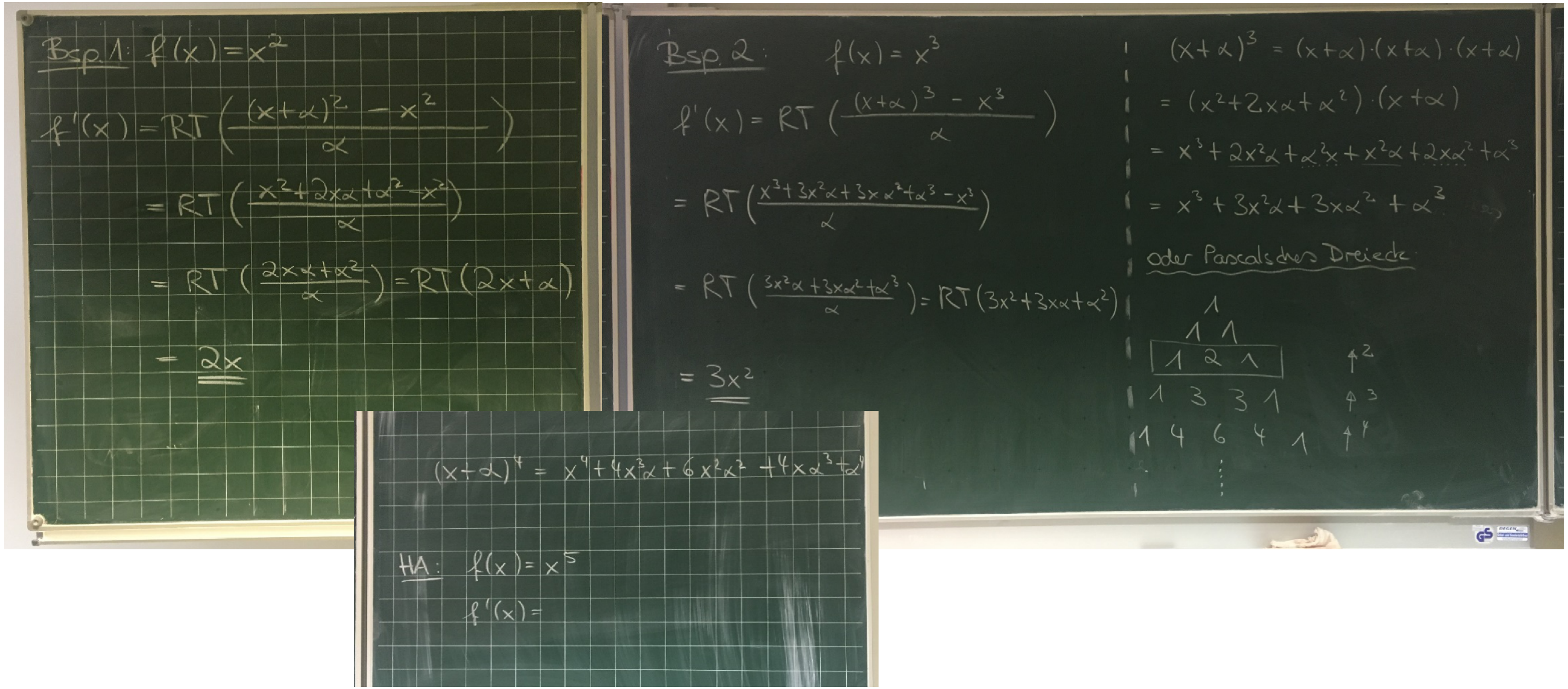
Die lokale Steigung einer Funktion an einer Stelle
Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar an einer Stelle $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, wenn sich für
den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}$ für jedes infinitesimale $\alpha \neq 0$
eindeutig ein Realteil angeben lässt.
Dieser Realteil wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt.
$\boxed{f'(x_0) := RT\left(\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}\right)}$
$f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente von f an der Stelle x_0 an.
$f'(x_0)$ wird auch als lokale Steigung oder lokale Änderungsrate von f an
der Stelle x_0 bezeichnet.

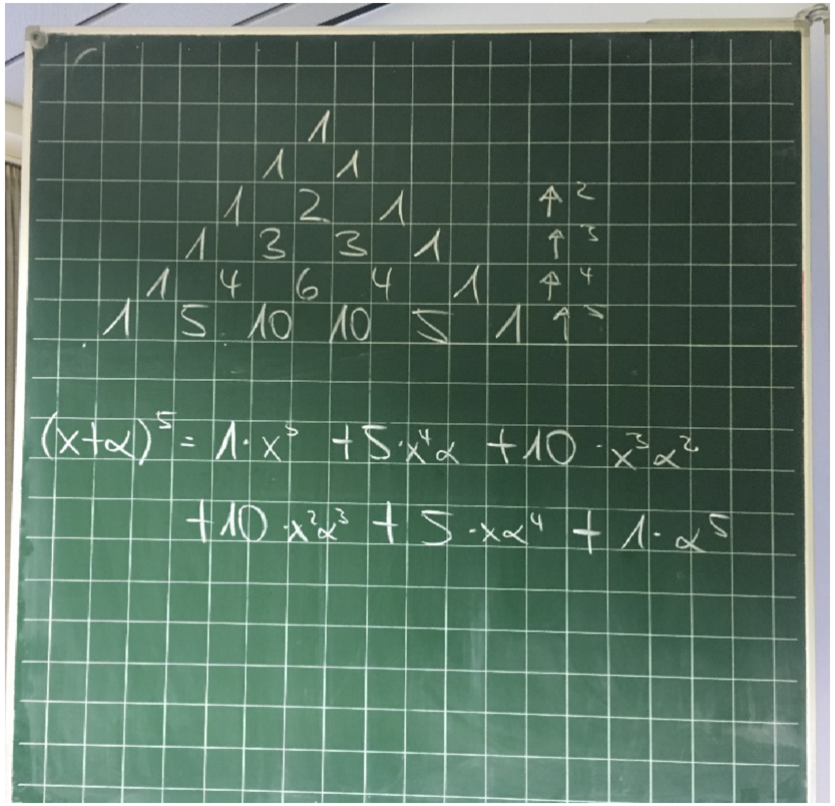
Weiterer Verlauf der Unterrichtsreihe

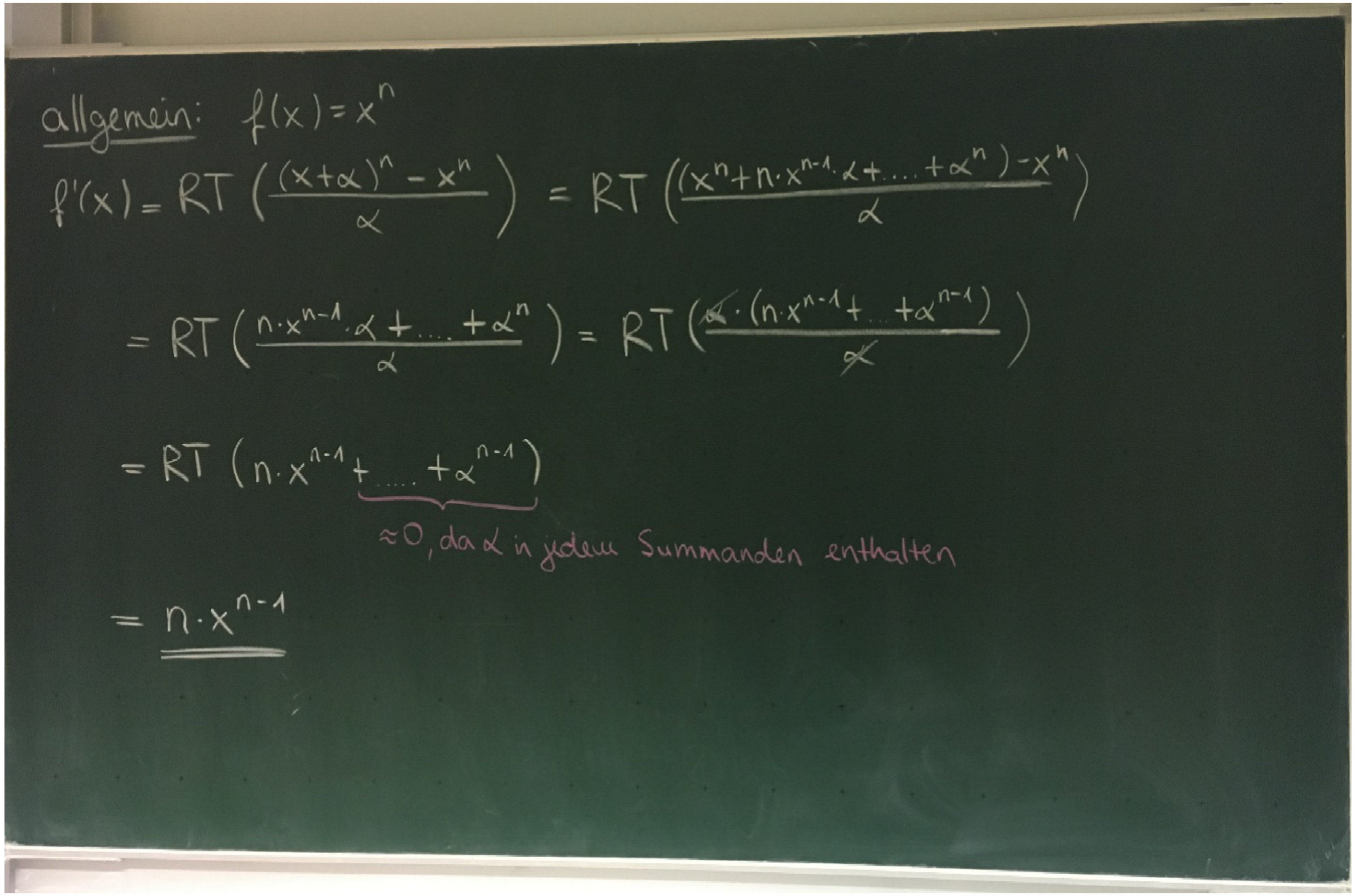
Inhalt	Rolle der Infinitesimalien	
0,999… - Frage	im Anmarsch… (4h)	✓
Hyperreelle Zahlen: Einführung – Verständnisfragen - Übungen	zentral (7h)	✓ ✓
Lineare Funktionen: Differenzenquotient, Steigung	---	
Einführung des Ableitungsbegriffs: mittlere Steigung einer Funktion, lokale Steigung einer Funktion	als Kalkül (8h)	✓
Ableitungsfunktion	---	
Graphisches Ableiten	---	
Elementare Ableitungsregeln erarbeiten	als Kalkül (4h)	
Ableitungsregeln anwenden	---	
Eigenschaften von Funktionen/ Funktionsuntersuchungen	---	
Anwendungen der Differentialrechnung	---	

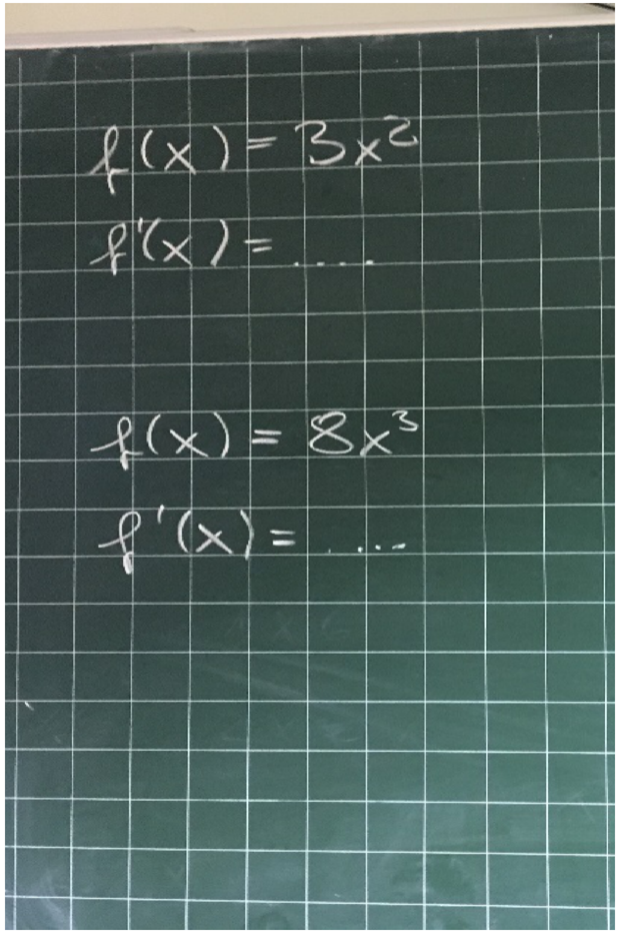
→ Fast alles wie gehabt;
Ausnahme: Elementare Ableitungsregeln erarbeiten

Elementare Ableitungsregeln erarbeiten

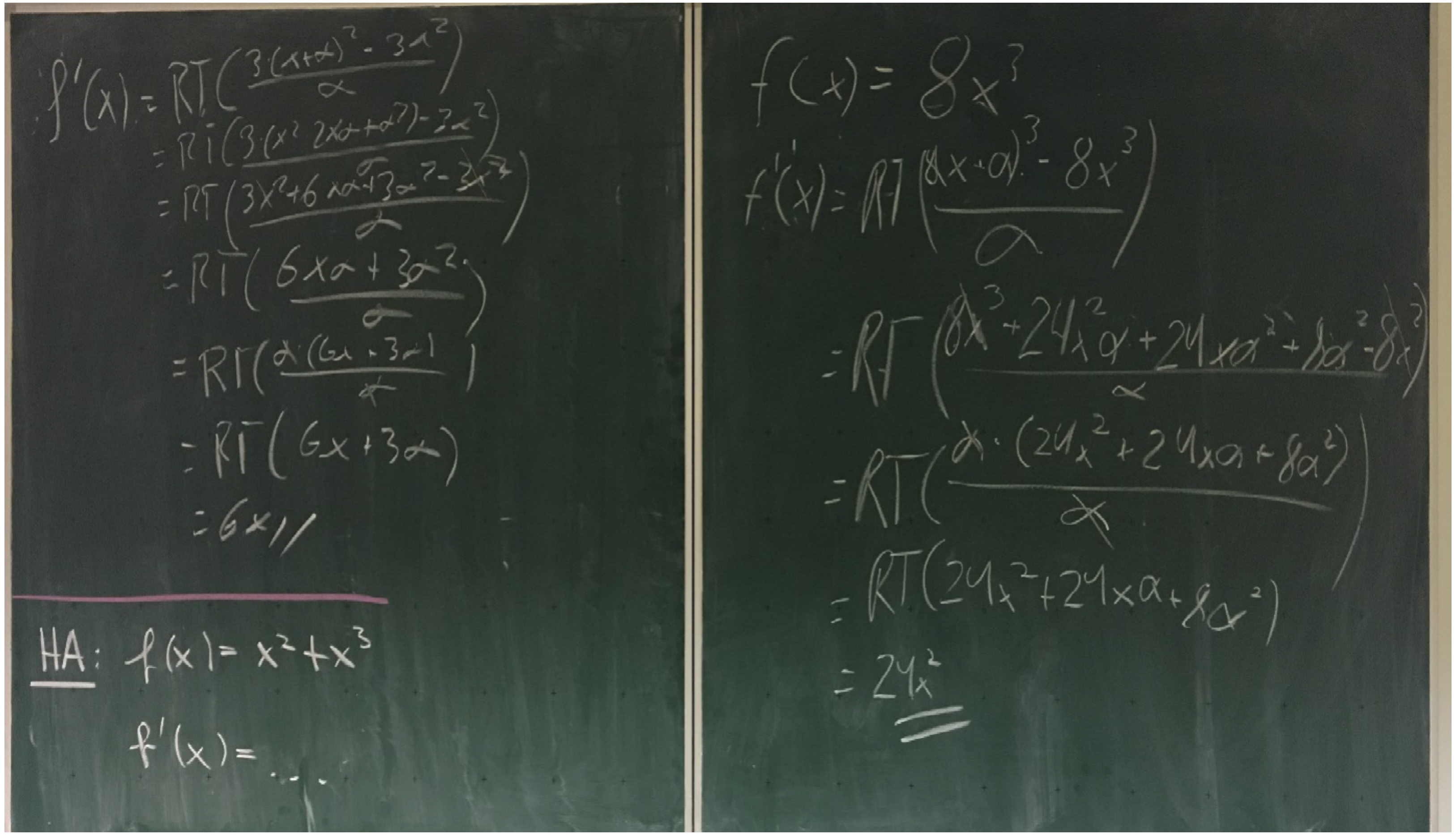



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
$(x+\alpha)^5 = 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4\alpha + 10\cdot x^3\alpha^2$
$+ 10\cdot x^2\alpha^3 + 5\cdot x\alpha^4 + 1\cdot\alpha^5$


allgemein: $f(x) = x^n$
$f'(x) = RT\left(\frac{(x+\alpha)^n - x^n}{\alpha}\right) = RT\left(\frac{(x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot\alpha + \ldots + \alpha^n) - x^n}{\alpha}\right)$
$= RT\left(\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\alpha + \ldots + \alpha^n}{\alpha}\right) = RT\left(\frac{\cancel{\alpha}\cdot(n\cdot x^{n-1} + \ldots + \alpha^{n-1})}{\cancel{\alpha}}\right)$
$= RT(n\cdot x^{n-1} \underbrace{+ \ldots + \alpha^{n-1}}_{})$
≈ 0, da α in jedem Summanden enthalten
$= n\cdot x^{n-1}$



f(x) = 3x²
f'(x) = ...
f(x) = 8x³
f'(x) = ...



= RT(6x + 3α)
= 6x
HA: f(x) = x² + x³
f'(x) = ...
f(x) = 8x³
= RT(24x² + 24xα + 8α²)
= 24x²

Schüleräußerung

Nach der Erarbeitung der Ableitungsregeln (Potenzregel, Summen-, Faktor-, Konstantenregel) sollen diese geübt werden.

Schülerin: „Müssen wir das jetzt mit diesen Regeln machen oder dürfen wir das auch ganz normal mit α machen?“ ☺

Überprüfungen

Mathe gk 11/1 **Hausaufgabenüberprüfung** **25.10.2018**

1) Ein Wetterballon funkt beim Aufsteigen unter anderem seine Positionsdaten. Seine Steighöhe wird durch die Funktion $h(t) = -2t^2 + 16t$ erfasst (t in Stunden, h in km).

a) Zeichne den Graphen von h für $0 \leq t \leq 3$.

b) Wie groß ist die mittlere Steiggeschwindigkeit des Ballons in der ersten halben Stunde?

c) Wie groß ist die momentane Steiggeschwindigkeit beim Start? Ermittle die Lösung mithilfe einer Näherungstabelle.

d) Wann hat der Ballon eine Höhe von 24 km erreicht?

e) Wie groß ist die momentane Steiggeschwindigkeit bei t=2? Ermittle die Lösung mithilfe einer exakten Realteilrechnung.

f) Wie könnte man die Steiggeschwindigkeiten aus b) und e) graphisch veranschaulichen?

Mathe gk 11/1 **Kursarbeit** **20.11.2018**

1) Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen: a) $0{,}5x^2 = 1 + 1{,}75x$ b) $3x^2 + 2 = 1 - x^2$ c) $x \cdot (x - 7) = 2 \cdot (1 - 2x) + 38$

2) Liebe Mathematikerinnen,
ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $\frac{1}{9} = 0.111\ldots$, $\frac{3}{9} = 0.333\ldots$ usw. Was aber ist dann $0.999\ldots$? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $\frac{9}{9}$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und $0.999\ldots$ ist doch ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es $0.999\ldots$ überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man zu $0.999\ldots$?
Ich würde mich über eine Antwort freuen.
Lina

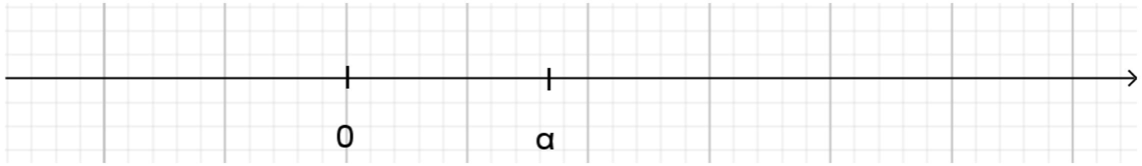
Beantworte Linas Brief. Begründe deine Antwort.

3) Gegeben sind die hyperreellen Zahlen $\alpha = (0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ \ldots)$ und $\beta = (\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{9}{8}; \ldots)$.

a) Berechne $1 - \alpha$ und $\beta - 1$. Welche Art von Zahlen sind diese Ergebnisse?

b) Berechne $1/\alpha$ und $1/\beta$. Welche Art von Zahlen sind diese Ergebnisse?

4) Wo liegen die Zahlen a) 1 und b) $-\frac{1}{2}\alpha$? Markiere auf der Zahlengerade oder begründe, warum dies nicht möglich ist.



5) α sei eine Infinitesimalzahl. Bestimme den Realteil von a) $10 - 2\alpha$ b) $\alpha \cdot (\alpha + 1)$ c) $\frac{25-(5-\alpha)^2}{\alpha}$

6) Ein Auto bremst ab. Der zur Zeit t zurückgelegte Weg lässt sich durch die Funktion $s(t) = 40t - 4t^2$ beschreiben (t in Sekunden, s in Meter).

a) Zeichne den Graphen von s für $0 \leq t \leq 5$.

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Autos in diesem Zeitraum?

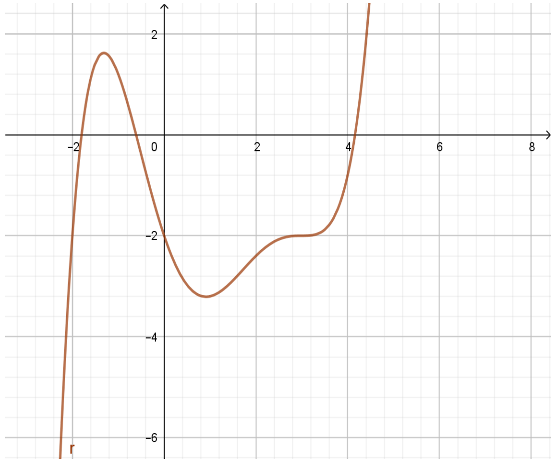
c) Bestimme die Momentangeschwindigkeit des Autos zu Beginn des Bremsmanövers ($t = 0$) mithilfe einer Näherungstabelle.

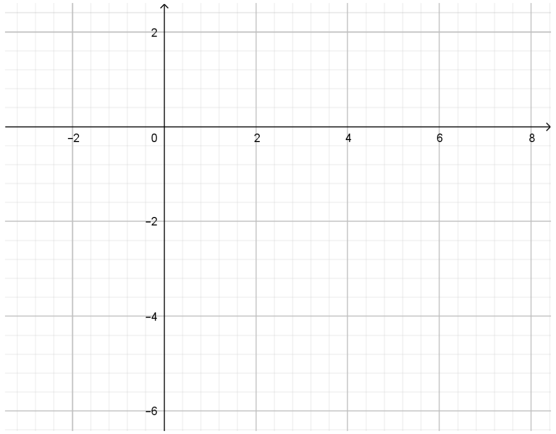
d) Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit bei $t = 3$? Ermittle die Lösung mithilfe einer exakten Realteilrechnung.

e) Wann steht das Auto? Gib eine kurze Begründung.

f) Wie könnte man die Geschwindigkeiten aus b) und d) graphisch veranschaulichen?

7) In das obere KOSY ist der Graph der Funktion r eingezeichnet. Zeichne in das untere KOSY den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion r‘ ein.





Schülerlösungen zu Nr. 2

2) Hey Lina,
Die Zahl 0,999... gibt es natürlich!
In der Grenzwertmathematik ist diese gleich 1, allerdings gibt es durch hyperreelle Zahlen eine Erweiterung der Zahlen, die dir wahrscheinlich noch nicht bekannt ist.* Mit ihnen können unendlich klein und unendlich große ~~[illegible]~~ Zahlen dargestellt werden. Daher ~~hast du mit diese~~ ist 0,999... ein Unendlichstel kleiner als 1. Dieses kleine Unendlichstel kannst du als α bezeichnen. Ich hoffe ich konnte dir weiterhelfen.
* (die Infinitesimalmathematik)

Liebe Lina,
In der Mathematik gibt es zwei Theorien. Einmal die Theorie, die bei uns Standard ist und die Infinitesimal-Theorie. ~~Ka~~ Wenn du an die ~~[illegible]~~ Lösung für dein Problem kommen willst, kannst du entweder Grenzwerte (die sehr schwer sind) oder Infinitesimalien (unendlich kleine Zahlen) verwenden. Bei der Grenzwertmathematik ist 0,999... = 1, bei der ~~1. 0,999 [illegible]~~ anderen Methode ist 0,999 ~~[illegible]~~ infinitesimal benachbart zu 1. Das heißt, eine unendlich kleine Zahl, die die 1 nie erreichen wird. Du kannst dir aussuchen, was du verwendest. Begründungen für die jeweilige Theorie lassen sich bei beiden finden.

2) Liebe Lina,

beide Theorien sind richtig. Sowohl das Argument, welches besagt, dass $\frac{9}{9} = 1$ wäre aber auch das Argument, dass 0,9999... kleiner als 1 ist. Es kommt lediglich auf die Begründung an. In der Grenzwertmathematik ist 0,999... gleich 1 und in der infinitesimalen Mathematik ist 0,999... kleiner als 1. Jedoch kann ich der Theorie, dass 0,999... kleiner als 1 ist besser folgen, da wie du schon sagtest, ein sehr sehr kleines Stückchen zur 1 fehlt und somit 0,999... kleiner als 1 ist.

Jedoch ist es so, dass viele Menschen sagen, dass dieses Unendlichstück, welches noch zur 1 fehlt so klein ist, dass es sogut wie nichts ausmacht und damit 0,999... gleich 1 ist.

2)

~~[illegible] das~~

Liebe Lina,

da Ihr mit unendlichen also infiniten Zahlen, infinitesimalen um genau zu sein, arbeitet, werden merkwürdige Ergebnisse rauskommen. Es wurde definiert das 0,999... = 1 ist, da man durch Umstellung der Zahl "tricksen" kann und dies zu merkwürdigen Zahlen führt. Theoretisch gibt es die Zahl, aber nicht als eine echte Zahl, da es nichts wirklich unendliches gibt.

2) Liebe Lina,

0,999 ist je nach Theorie gleich 1 oder kleiner 1. In der Grenzmathematik ist 0,999 = 1. Dies kannst du durch unterschiedliche Beweise belegen z.B mithilfe des arithmetischen Mittels $\frac{a+b}{2}$. $\frac{0{,}999 + 1}{2} = \frac{1{,}999}{2} = 0{,}999$

Damit ist keine Zahl zwischen 0,999 und 1. In der Grenzmathematik grenzt die 0,999 an 1 also schmiegt sich an sie und ist somit 1.

In der Infinitesimalmathematik gibt es, wie du schon genannt hast eine Zahl. Diese Zahl ist ein Unendlichstel und ist unendlich klein aber nicht 0. Sie ist kleiner als jede positive reele Zahl aber eben nicht 0. Wir nennen sie α (oder β, γ (...)). Sie ist eine infinitesimale Zahl.

$$\alpha = 1 - 0{,}999 = 1 - (0{,}9;\ 0{,}09;\ 0{,}009 \ldots) = (0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots).$$

Diese infinitesimale Zahl ist zwischen 1 und 0,999 und beweist damit, dass $0{,}999 < 1$ ist.

Ich hoffe ich konnte dir weiterhelfen.

Liebe Grüße,

Gabi

Unser Fazit

Es lohnt…

- und man lernt immer noch selbst dazu!