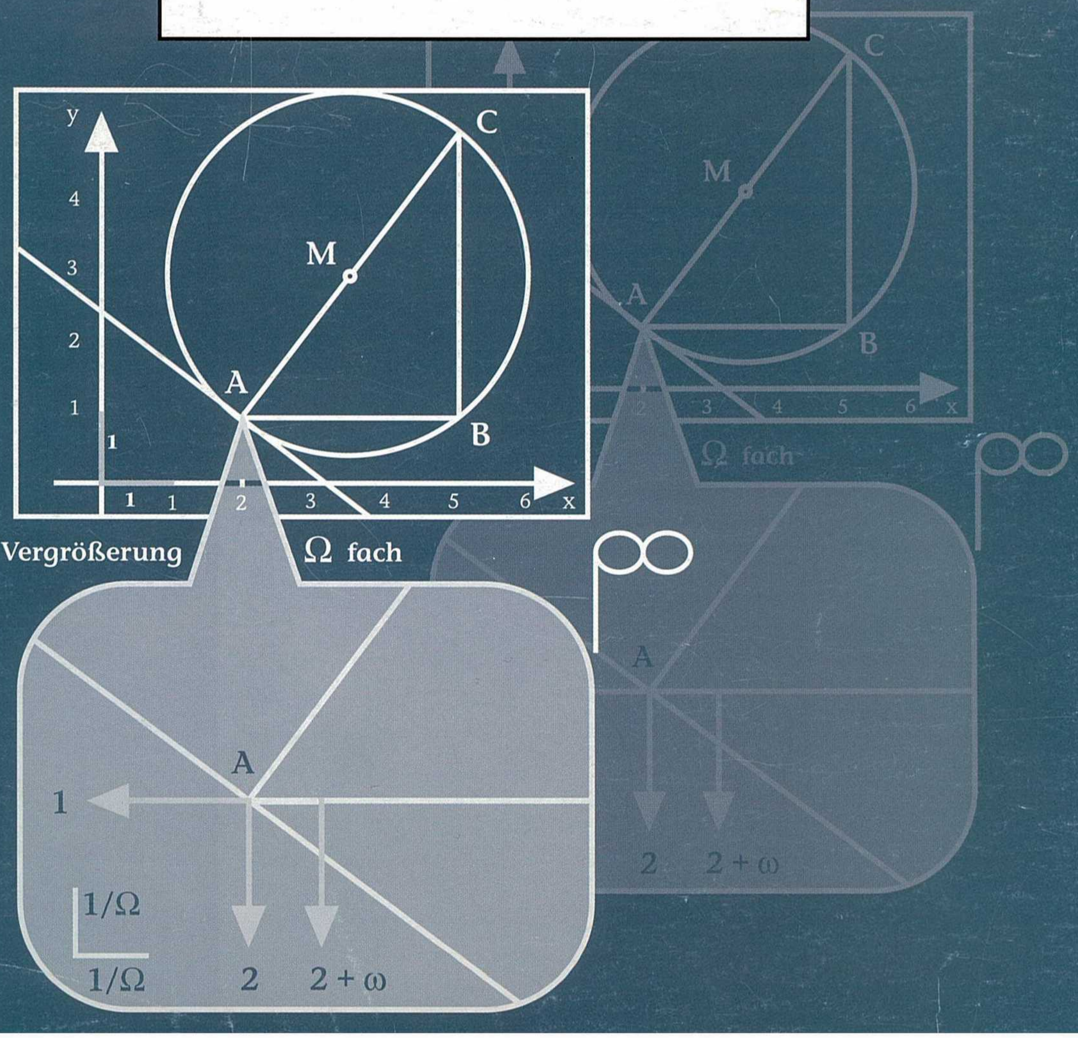
Nr. 4 1996 I

UNTERRICHTSMATERIALIEN

Mathematik betrifft uns

Mit zwei Overheadfolien

Differential- und Integralrechnung mit hyperreellen Zahlen



Bergmoser + Höller
Verlag GmbH

Differential- und Integralrechnung mit hyperreellen Zahlen

Zum Inhalt

„Mathematik betrifft uns" enthält Planungsmaterial für einen motivierenden und effizienten Mathematikunterricht mit

- allgemeinen Informationen zum Thema
- Vorschlägen zum Unterrichtsverlauf
- umfangreichen Materialien (Informations- und Aufgabenblätter, Lösungsvorschläge, Klausuraufgaben) zum Kopieren
- abwechselnd Overheadfolien oder eine Begleitdiskette (3,5", für PCs)

Unser Ziel

„Mathematik betrifft uns" bietet Ihnen Unterrichtsmaterial für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II mit Berücksichtigung der Klassen 8-10 der Sekundarstufe I, das

- Ihnen die Unterrichtsvorbereitung verkürzt und erleichtert
- Standardthemen in neuer didaktischer Aufbereitung präsentiert
- durch Einbeziehung von modernen Medien den Unterricht abwechslungsreicher und anschaulicher macht

Der Kontakt

Wir freuen uns, wenn Sie uns Ihre Erfahrungen und Verbesserungsvorschläge mitteilen, damit „Mathematik betrifft uns" noch praxisbezogener werden kann.
Wenn auch Sie eine interessante Unterrichtsreihe ausgearbeitet haben, schreiben Sie uns doch einfach:

Bergmoser + Höller Verlag
Redaktion Mathematik betrifft uns
Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen

Impressum

Herausgeber:
Karel Tschacher, Heroldsberg

Autoren der Einheit:
Dr. Bernhard Steinig, Peter Baumann, Helmut Wunderling

Erscheinungsweise:
sechs Ausgaben pro Jahr

Abonnement:
DM 87,– plus Porto pro Jahr

Einzelheft mit Abonnement:
DM 14,50 plus Porto

Einzelheft ohne Abonnement:
DM 19,50 plus Porto

Satz:
graphodata GmbH, Aachen

Druck:
Image Druck GmbH, Aachen

Verlag:
Bergmoser + Höller Verlag GmbH
Karl-Friedrich-Str. 76
52072 Aachen

ISSN 0938-0876

Dr. Bernhard Steinig/Peter Baumann/Helmut Wunderling

Differential- und Integralrechnung mit hyperreellen Zahlen

Zum Inhalt

Die wesentliche Basis des herkömmlichen Analysisunterrichts ab der 11. Jahrgangsstufe ist der Grenzwertbegriff. Er ist aber – zumindest für viele Schüler/innen – auch das Hauptproblem. Viel Unterrichtszeit wird zu seiner Einführung und Verankerung in den Köpfen verwendet, um ihn schließlich bei der Anwendung der vergleichsweise einfachen Ableitungs- und Integrationsregeln eigentlich gar nicht mehr zu benötigen. Hier bietet das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen eine weittragende Alternative. Der Umgang mit diesen Teilmengen des Körpers der sog. hyperreellen Zahlen IH, einer Erweiterung des reellen Zahlenkörpers IR, geht schon auf die „Väter der Infinitesimalrechnung" zurück, war aber in der Mathematik lange Zeit nicht Gegenstand der Forschung. Dagegen rechneten beispielsweise Physiker schon immer mit infinitesimalen Zahlen.

Der folgende Unterrichtsgang befaßt sich mit der Differential- und Integralrechnung. Im Gegensatz zur „Grenzwert-Analysis" ergeben sich hier alle bekannten Regeln der Differential- und Integralrechnung durch einfaches Rechnen, wodurch sich eine beträchtliche Beschleunigung ergibt, die wiederum Raum für Anwendungen und Vertiefungen freisetzt.

Didaktische Überlegungen

Bei der Einführung der Differentialrechnung ist die starke graphische Unterstützung für das Verständnis wesentlich. Das gilt auch für den Zugang über hyperreelle Zahlen. Deshalb sind Folien ein wichtiges Hilfsmittel.

Der Unterrichtsgang beginnt mit einer Betrachtung von Vergrößerungen geometrischer Figuren, insbesondere des Kreises. Dazu gehören schließlich auch infinite, also unendlich starke Vergrößerungen. Diese sind den Schülerinnen und Schülern, bezogen auf die Zahlengerade, von der Einführung hyperreeller Zahlen her bekannt. Infinitesimal benachbarte, d.h. unendlich dicht beieinander liegende, Zahlen werden erst dadurch graphisch voneinander unterscheidbar.

Eine entsprechende Überlegung führt dazu, daß infinitesimal benachbarte Punkte auch bei Kreisen nur durch infinite Vergrößerung getrennt zeichenbar sind. Wichtiges Ergebnis ist dann, daß bei allen Vergrößerungen Geraden und Winkel als solche erhalten bleiben. Dagegen erscheinen Kreisbögen immer gestreckter, je stärker man sie vergrößert. Bei infiniter Vergrößerung ist schließlich zu erwarten, daß man sie nur noch als Gerade zeichnen kann. Sie wären somit von der Tangente nicht mehr zu unterscheiden, eine Vermutung, die über den Höhensatz am rechtwinkligen Dreieck bewiesen wird.

Diese Betrachtungen über Vergrößerungen erfolgen mit Unterstützung einiger Folien, die gleichzeitig der Motivation dienen. Zur Ergebnissicherung schließlich wird ein Arbeitsbogen eingesetzt.

Für infinite Vergrößerungen von Funktionsgraphen wird hier ein wichtiges Zwischenergebnis erhalten: Strecken mit infinitesimaler Länge sind nur in derselben Vergrößerung darstellbar, wenn der Quotient ihrer Längen weder infinit noch infinitesimal ist.

Die den Schülerinnen und Schülern aus vorhergehenden Schuljahren bekannten Begriffe Kreis und Tangente und ihre neuartige Darstellung bei infiniter Vergrößerung legen schließlich nahe, auch bei anderen Kurven Tangenten zu definieren. Hier werden die soeben am Kreis gewonnenen neuen Erkenntnisse direkt übertragen. Am Ende der Überlegungen stehen die Definition der Kurventangente, der Kurvensteigung und des Begriffs der Differenzierbarkeit.

An dieser Stelle erfolgt die Einführung der in der Analysis üblichen Begriffe und Schreibweisen. Der Unterschied zur „Grenzwert-Analysis" besteht dar-

in, daß die Differentiale dy und dx hier tatsächlich Zahlen sind, mit denen gerechnet wird. Auch der Begriff „Quotient" bei zwei Differentialen ist nicht nur eine Entlehnung, sondern er ergibt sich rechnerisch. Deswegen lautet die Sprechweise „dy **durch** dx" und nicht „dy **nach** dx".
Nun ist es also möglich, Steigungen der Normalparabel an festen reellen Punkten direkt zu berechnen. Dazu erweitert man zunächst die Funktion ins Hyperreelle und vergrößert am zu untersuchenden Punkt P mit einem infiniten Faktor. Dort erscheint die Normalparabel als Gerade, wobei alle anderen Parabelpunkte in jedem endlichen Ebenenausschnitt infinitesimale Nachbarn von P, also nicht reell sind. Die Steigung der Verbindungsgeraden zweier solcher infinitesimal benachbarter Kurvenpunkte läßt sich berechnen, sie ist eine hyperreelle Zahl. Allen solchen Steigungen ist jedoch eines gemeinsam: sie besitzen denselben reellen Teil. Dieser wird als die (reelle) Steigung der Parabel, die in dieser Vergrößerung von einer echten Geraden, d.h. der reellen Tangente, zeichnerisch nicht zu unterscheiden ist, definiert.
Im nächsten Schritt wird die 1. Ableitung als eine Funktion erkannt. Das bis dahin mehrfach für konkrete x-Werte durchgeführte Verfahren wird nun für die Variable x wiederholt und die 1. Ableitungsfunktion als geschlossener Term errechnet.
Eine Übungsphase zur Berechnung von Ableitungsfunktionen führt zur Potenzregel, die als erste Ableitungsregel hergeleitet wird. Darauf folgen mit Identitäts-, Konstanten-, Summen- und Faktorregel die wichtigsten Ableitungsregeln für den Einführungsunterricht. Ihr Beweis kann den Schülerinnen und Schülern als Übung überlassen werden, auch arbeitsteilige Gruppenarbeit ist hier ein sinnvolles Vorgehen.
Darüberhinaus ist das nun eingeführte Verfahren zur Bestimmung anderer als ganzrationaler Funktionen geeignet. Deshalb werden anschließend die Ableitungsfunktionen der Wurzel-, der Kehrwert- sowie der Sinus- und Kosinusfunktion ermittelt. Die Ableitungsbestimmung der Winkelfunktionen geht dabei über bisherige Verfahren hinaus, da sie graphisch erfolgt. Erst danach werden Produkt- und Kettenregel hergeleitet, da ihre Einführung erst dann Sinn macht, wenn andere als ganzrationale Funktionen auftreten.
Bei der Verwendung hyperreeller Zahlen können die Aussagen der Differentialrechnung algebraisch hergeleitet werden, ohne daß schon vorher eine Vermutung über die gesuchte Regel vorliegen muß. Daher stehen hier im allgemeinen die mathematischen Lehrsätze am Ende eines Gedankenganges.
Hyperreelle Zahlen sind auch zur Berechnung krummlinig begrenzter Flächeninhalte ein wichtiges Hilfsmittel. Als Einführung der Integralrechnung werden Gedanken Archimedes' zum Inhalt der Normalparabel aufgegriffen. Daran schließt sich – nun aber mit Hilfe infinitesimaler Zahlen – die in der Schule übliche Berechnung der Fläche unter der Parabel an. In vielen Fällen dient dies der Motivierung des Hauptsatzes der Analysis.

Voraussetzungen/Lernziele

Neben Grundkenntnissen über Funktionen und ihre Graphen erfordert dieser Unterrichtsgang die Kenntnis des hyperreellen Zahlenkörpers, seiner Veranschaulichung und der in ihm geltenden Gesetzmäßigkeiten, speziell der Zerlegbarkeit (finiter) hyperreeller Zahlen in einen reellen und einen infinitesimalen Anteil. Dazu sei insbesondere auf „Mathematik betrifft uns" 2/95 verwiesen, wo hyperreelle Zahlen über Folgen eingeführt werden.

Die Schülerinnen und Schüler
- beschreiben, daß sich bei finiten Vergrößerungen Geraden und Winkel nicht verändern und daß Kreisbögen gestreckter erscheinen,
- wissen, daß Kreisbögen bei infiniter Vergrößerung als Geraden erscheinen,
- wissen, daß infinitesimale Strecken nur dann gleichzeitig zeichenbar sind, wenn der Quotient ihrer Längen weder infinit noch infinitesimal ist,
- wissen, daß eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist, wenn ihr Graph bei infiniter Vergrößerung dort als Gerade erscheint,
- wissen, daß am Berührpunkt die Steigungen von Graph und Tangente übereinstimmen,
- berechnen die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an einer festen Stelle x_0,
- berechnen die Ableitungsfunktionen von Potenzfunktionen,
- leiten Potenz-, Identitäts-, Konstanten-, Faktor- und Summenregel der Differentialrechnung her,
- bestimmen die Ableitungsfunktionen der Wurzel- und der Kehrwertfunktion,
- leiten die Sinus- und die Kosinusfunktion ab,
- ermitteln Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung,
- bestimmen mit einer heuristischen Methode durch Anwenden des Hebelgesetzes den Flächeninhalt eines Parabelsegments,
- berechnen den Inhalt der Fläche unter der Normalparabel,
- berechnen den Inhalt der Fläche unter der Parabel mit $f(x) = kx^2$.

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A

Einstieg/Anknüpfung an Bekanntes

1 VERGRÖSSERUNGSTECHNIK

M 1.1 **Funktionsgraphen bei verschiedenen Vergrößerungen**

Bei der Darstellung von Funktionen kann man den Ausschnitt sowie die Teilung der Achsen frei wählen. Durch geeignete Wahl dieser Parameter sollen das Wesentliche eines zu untersuchenden Sachverhalts für den Betrachter sichtbar und die Schlußfolgerungen nachvollziehbar sein. — **LV, UG**

Erarbeitung

M 1.2 **Finite (endliche) Vergrößerungen**

Satz 1 (von den finiten Vergrößerungen): — **UG**
a) Winkelgrößen bleiben erhalten.
b) Geraden bleiben Geraden.
c) Je größer der Vergrößerungsfaktor ist, desto stärker erscheint ein Kreisbogen gestreckt.

Einsatz der Folie 1 zu endlichen Vergrößerungen: Die Folie zeigt ein kartesisches Koordinatensystem in drei verschiedenen Maßstäben und Ausschnitten. — **Folie 1**

Transfer

M 1.3 **Infinite (unendliche) Vergrößerungen**

Satz 2 (von den infiniten Vergrößerungen): — **UG**
a) Winkelgrößen bleiben erhalten.
b) Geraden bleiben Geraden.
c) Kreisbögen werden infinit gestreckt, werden somit zu Geraden und sind von der Tangente an den Kreis nicht mehr zu unterscheiden.

Einsatz von Folie 1 zu infiniten Vergrößerungen — **Folie 1**

Verallgemeinerung

M 1.4 **Infinitesimale Größenordnungen**

Satz 3 (von den infinitesimalen Größenordnungen): — **UG**
Zwei infinitesimale Größen sind nur dann bei gleicher Vergrößerung mit finiter Länge zeichenbar, wenn ihr Quotient weder infinit noch infinitesimal ist.

Die Tabelle aus dem Materialteil (M 1.4) ist als Kopiervorlage zur Folienherstellung geeignet.

Aufgabe

Was kann über die zu zeichnenden Streckenlängen a und h gesagt werden, wenn man noch ein drittes Mal infinit vergrößert?

Lösung: h und a sind beide infinit lang.

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M	Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase	A

2 Tangente an einer Parabel

Erarbeitung

M 2.1 Zeichnerische Bestimmung der Tangente

Graphen differenzierbarer Funktionen — UG

Erscheint der Graph einer (hyperreell erweiterten) Funktion bei infiniter Vergrößerung als eine Gerade, so besitzt ihr Graph in normaler Darstellung in diesem Punkt eine Tangente. Die Bilder von Tangente und Kurve stimmen bei dieser Vergrößerung überein. Man sagt, die Funktion ist an dieser Stelle differenzierbar. Ist dies an allen Punkten eines Graphen der Fall, so heißt die gesamte Funktion differenzierbar.

Der obere Teil der Folie 2 zeigt den Graphen von $f(x) = x^2$ mit dem Punkt $P = (2; f(2))$ in „normaler" Vergrößerung, daneben ein Koordinatenkreuz mit P, allerdings nicht bis zum Ursprung durchgezeichnet, sondern jeweils mit Lücken zur Andeutung der infiniten Entfernung bis dorthin. — Folie 2

Folie 2 (unterer Teil): In der infiniten Vergrößerung ist eine Gerade durch P mit der Steigung 4 abgebildet, auf der der weitere Punkt $Q = (2 + \alpha; (2 + \alpha)^2)$ eingezeichnet ist. Auf den Achsen sind auch die Stellen $x = 2 + \alpha$ und $y = 4 + 4\alpha$ vermerkt.

Ergebnissicherung

Die Steigung eines Graphen: — EA/PA

Die Steigung des Graphen einer rellen Funktion in einem Punkt P stimmt mit der Steigung ihrer Tangente in diesem Punkt überein. Sie ist gleich dem reellen Teil des Änderungsquotienten für zwei infinitesimal benachbarte Kurvenpunkte ihrer hyperreellen Erweiterung. Vgl. mit M 2.1, Abb. 1, identisch mit Folie 2 (unterer Teil).

Aufgabe

Geben Sie den gesamten Vergrößerungsfaktor an, mit dem a^2 sichtbar gemacht werden kann. Welche Auswirkung ergibt sich für den Punkt Q?

Lösung:

Der Vergrößerungsfaktor ist $\frac{1}{a^2}$; Q kann dann aber nicht mehr in endlicher Entfernung von P gezeichnet werden.

M 2.2 Die Leibnizsche Sprech- und Schreibweise

Die infinitesimalen Zahlen dx und dy nennt man Differentiale. Mit Differentialen kann man rechnen. Bei der Division zweier Differentiale $\frac{dy}{dx}$ (gesprochen dy **durch** dx) erhält man einen Differentialquotienten. — LV

M 2.3 Berechnung der Steigung der Normalparabel im Punkt P

Besitzen alle Differentialquotienten in einem Punkt $P = (x_0; f(x_0))$ eines Funktionsgraphen denselben reellen Teil, so nennt man ihn die Steigung des Funktionsgraphen von f an der Stelle x_0, kurz geschrieben $f'(x_0) = RT(\frac{dy}{dx})$, andernfalls nicht. — UG, TA

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

M 2.4 Anwendung und Übung

EA/PA, evtl. HA

Aufgaben

Berechnen Sie die Steigung der Normalparabel $f(x) = x^2$ für die folgenden Stellen x_0. Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Differentialrechnung:

a) $x_0 = 3$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 0$
d) $x_0 = -1$

Lösungen:
a) $f'(3) = 6$
b) $f'(1) = 2$
c) $f'(0) = 0$
d) $f'(-1) = -2$

zu a)

$$f'(3) = RT\left(\frac{dx}{dy}\right) = RT\left(\frac{f(3 + dx) - f(3)}{dx}\right) = RT\left(\frac{9 + 6dx + (dx)^2 - 9}{dx}\right) = RT\left(\frac{dx(6 + dx)}{dx}\right)$$

$$= RT(6 + dx) = 6.$$

Die anderen Lösungen ergeben sich entsprechend.

3 ABLEITUNGSFUNKTION

Erarbeitung

M 3.1 Die Ableitungsfunktion zu $f(x) = x^2$

UG/EA/PA

Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ergab sich an allen Stellen x_0 auf die gleiche Weise. Daher soll nun die 1. Ableitung für ein beliebiges x berechnet werden.

Ergebnissicherung

Satz 4
Die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ lautet $f'(x) = 2x$.

Transfer und Übung

M 3.2 Ableitung einfacher Potenzfunktionen

Aufgaben

Bestimmen Sie auch von folgenden Potenzfunktionen die 1. Ableitung als Funktion:

a) $f(x) = x^3$
b) $g(x) = x^4$

Lösungen:
a) $f'(x) = 3x^2$
b) $g'(x) = 4x^3$

zu a)

$$f'(x) = RT\left(\frac{dx}{dy}\right) = RT\left(\frac{(x + dx)^3 - x^3}{dx}\right) = RT\left(\frac{x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 - x^3}{dx}\right)$$

$$= RT\left(\frac{dx(3x^2 + 3x \cdot dx + (dx)^2)}{dx}\right) = RT(3x^2 + 3x \cdot dx + (dx)^2) = 3x^2$$

Die Lösung **zu b)** ergibt sich entsprechend.

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

4 Einfache Ableitungsregeln

Problematisierung/Erarbeitung

M 4.1 **Potenzregel**

Satz 5
Sei $f(x) = x^n$ gegeben mit $x \in \mathbb{R}$ sowie $n \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

UG, TA

Übung

M 4.2 **Identitäts- und Konstantenregel**

Identitäts-, Konstanten-, Summen- und Faktorregel sollen die Schülerinnen und Schüler nun, möglicherweise arbeitsteilig, selbst errechnen.

EA/PA, HA

Aufgaben

Errechnen Sie die 1. Ableitungen folgender Funktionen:
a) *$f(x) = x$*
b) *$g(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$*

Lösungen:
a) $f'(x) = 1$
b) $g'(x) = 0$
Lösungen analog zu den Aufgaben in M 3.2.

Weitere Übung

M 4.3 **Summen- und Faktorregel**

UG/EA/PA, evtl. HA

Aufgaben

Beweisen Sie die folgenden Sätze:
Satz 6
Sei die Summe zweier reeller Funktionen mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gegeben. Dann gilt für die 1. Ableitung der Summe $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
(Kurz: $(f + g)' = f' + g'$)
Satz 7
Sei eine Funktion g mit einem konstanten reellen Faktor a multipliziert, also $f(x) = a \cdot g(x)$. Dann lautet die 1. Ableitung $f'(x) = a \cdot g'(x)$. Der konstante Faktor bleibt also beim Bilden der 1. Ableitung erhalten.

Lösung:
Satz 6:

$$f'(x) = RT\left(\frac{dx}{dy}\right) = RT\left(\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}\right) = RT\left(\frac{(g(x + dx) + h(x + dx)) - (g(x) + h(x))}{dx}\right)$$

$$= RT\left(\frac{(g(x + dx) - g(x)) + (h(x + dx) - h(x))}{dx}\right)$$

$$= RT\left(\frac{g(x + dx) - g(x)}{dx}\right) + RT\left(\frac{h(x + dx) - h(x)}{dx}\right)$$

$$= g'(x) + h'(x).$$

Lösung zu **Satz 7** analog.

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

5 Ableitungsfunktionen anderer Funktionen

Die bisherigen Regeln machen es möglich, jeweils die Ableitungsfunktion ganzrationaler Funktionen, das sind Funktionen p mit Funktionsgleichungen der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, zu bestimmen. Es soll nun versucht werden, den reellen Teil der Differentialquotienten bei anderen Funktionen und damit die Steigung ihrer Graphen zu ermitteln.

M 5.1 Ableitung der Wurzelfunktion

Satz 8 — UG

Die Ableitung der Wurzelfunktion $f: x \to \sqrt{x}$, $x > 0$ lautet $f': x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

M 5.2 Ableitung der Kehrwertfunktion

Satz 9 — UG

Die Ableitung der Kehrwertfunktion $f: x \to \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ lautet $f': x \to -\frac{1}{x^2}$.

Aufgabe

Formulieren Sie die Aussagen der Sätze für die 1. Ableitungen der Wurzel- bzw. der Kehrwertfunktion mit Hilfe von Potenzausdrücken mit rationalen Exponenten. Vergleichen Sie diese Formulierungen mit der Potenzregel.

Lösung:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und

$g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow g'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

M 5.3 Ableitung von Sinus und Kosinus

Satz 10 — UG

Die Ableitung der Sinusfunktion $f: x \to \sin(x)$ lautet $f': x \to \cos(x)$.

Aufgabe

Bestimmen Sie ebenfalls anhand der Zeichnung die 1. Ableitung der Kosinusfunktion. Beachten Sie dabei, daß $\cos(x + dx) < \cos(x)$ gilt.

Lösung:

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

Legende zum Unterrichtsverlauf

M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

6 Weitere Ableitungsregeln

Mit den bisherigen Regeln lassen sich zwar von vielen Funktionen die Ableitungsfunktionen berechnen, allerdings erlauben sie nicht, z.B. Funktionen mit Funktionsgleichungen wie $f(x) = x \cdot \sin(x)$ oder $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$ zu bestimmen. Im ersten Fall ist das Produkt zweier Funktionen abzuleiten, im zweiten Fall sind Funktionen miteinander verkettet, d.h. auf x wird zunächst die Sinusfunktion angewendet und vom Ergebnis wird dann die Wurzel gezogen.

M 6.1 Produktregel

Satz 11 (Produktregel) UG
Für das Produkt zweier Funktionen $f \cdot g$ mit $f: x \to f(x)$ und $g: x \to g(x)$ gilt $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

M 6.2 Kettenregel

Satz 12 (Kettenregel) UG
Die Ableitung der Verkettungsfunktion f der Funktionen h und g mit $f(x) = g(h(x))$ lautet $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Aufgaben

Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:
a) *f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$*

b) *g mit $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$*

Lösungen:
a) $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

b) $g'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

7 Flächeninhaltsberechnungen

M 7.1 Flächeninhalt eines Parabelsegments

Nach Archimedes wird eine Fläche als aus unendlich vielen Strecken von unendlich kleiner Breite zusammengesetzt gedacht. Jede dieser Strecken steht wie bei einem physikalischen Hebel im Gleichgewicht mit einer bestimmten Strecke eines Dreiecks. Folglich steht das ganze Parabelsegment im Gleichgewicht mit diesem Dreieck. Daraus ergibt sich, daß das Segment der Parabel mit $f(x) = kx^2$ zwischen $A(-a; ka^2)$ und $C(a; ka^2)$ $[a > 0]$ den Flächeninhalt $\frac{4}{3} ka^3$ besitzt.

Diese Überlegung kann in einem physikalischen Experiment mit Hebel, Parabelsegment und Dreieck aus Pappe gezeigt werden (vgl. M 7.1, Abb. 1, im Materialteil).
Das hier benötigte geometrische Wissen des Archimedes kann als Übung im Umgang mit Funktionstermen erworben werden.

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

M | Unterrichtsverlauf/Unterrichtsphase | A

M 7.2 Integration der Funktion $f: x \to x^2$ über dem Intervall [0; 1]

Der Flächeninhalt unter der Normalparabel im Intervall [0; 1] beträgt ein Drittel des Einheitsquadrates. Das bestätigt Archimedes' Ergebnis, denn die rechte Hälfte des Parabelsegments besitzt als Flächeninhalt die restlichen zwei Drittel des Einheitsquadrates (vgl. M 7.2, Abb. 1, im Materialteil).

Aufgaben

Übertragen Sie die Überlegungen auf die Funktion f mit $f: x \to kx^2$, $(k > 0)$

***1)** im Intervall [0; b]*

***2)** im Intervall [a; b]*

Lösungen:

zu 1)

Wegen $\Omega \cdot dx = b$ setzt man $dx := \frac{b}{\Omega} = b \cdot \omega$. Es gilt

$$A(f) = RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} k(j \cdot dx)^2 dx\right) = RT\left(k(dx)^3 \sum_{j=1}^{\Omega} j^2\right) = RT\left(kb^3\omega^3 \frac{\Omega(\Omega+1)(2\Omega+1)}{6}\right)$$

$$A(f) = k\frac{b^3}{3}.$$

zu 2)

Das Intervall [a; b] wird in Ω Teilintervalle der infinitesimalen Länge dx eingeteilt. Wegen $\Omega \cdot dx = b - a$ setzt man $dx := \frac{b-a}{\Omega} = (b-a) \cdot \omega$. Die Funktionswerte werden an den Unterteilungsstellen $x_j = a + j \cdot dx$ berechnet.

Es gilt

$$A(f) = RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} k(a + j \cdot dx)^2 dx\right) = k \cdot RT\left(a^2 dx \sum_{j=1}^{\Omega} 1 + 2a \cdot (dx)^2 \sum_{j=1}^{\Omega} j + (dx)^3 \sum_{j=1}^{\Omega} j^2\right)$$

$$= k \cdot RT\left(a^2 \cdot dx \cdot \Omega + 2a(b-a)^2\omega^2 \frac{\Omega \cdot (\Omega+1)}{2} + (b-a)^3\omega^3 \cdot \frac{\Omega(\Omega+1)(2\Omega+1)}{6}\right)$$

$$= k\left(a^2(b-a) + a(b-a)^2 + (b-a)^3\frac{1}{3}\right) = \frac{k}{3}(b^3 - a^3)$$

Legende zum Unterrichtsverlauf
M = Material, **A** = Arbeitsform, **AB** = Arbeitsblatt, **CA** = Computerarbeit, **EA** = Einzelarbeit, **GA** = Gruppenarbeit, **HA** = Hausaufgabe, **LV** = Lehrervortrag, **OH** = Overheadprojektor, **PA** = Partnerarbeit, **SV** = Schülervortrag, **TA** = Tafelanschrieb, **UG** = Unterrichtsgespräch

Materialien

1 Vergrößerungstechnik

M 1.1 Funktionsgraphen bei verschiedenen Vergrößerungen

Zweck graphischer Darstellungen

Stellt man Funktionen graphisch dar, so kann man den Ausschnitt sowie die Teilung jeder Achse prinzipiell frei wählen. Durch geeignete Wahl dieser Parameter sollen das Wesentliche eines untersuchten Sachverhalts für einen Betrachter sichtbar und Schlußfolgerungen nachvollziehbar sein.

M 1.2 Finite (endliche) Vergrößerungen

Die Folie zu M 1.2 zeigt ein kartesisches Koordinatensystem in drei verschiedenen Maßstäben und Ausschnitten.
In der oberen Abbildung sieht man einen Kreis mit dem Radius $r = 5/2$ um den Mittelpunkt M. Im Kreis ist ein pythagoräisches Dreieck ABC mit den bekannten Seitenlängen 3, 4 und 5 eingezeichnet. Die Hypotenuse ist gleichzeitig ein Durchmesser des Kreises. Ferner ist die Tangente in A eingetragen. Links unten beim Ursprung sieht man außerdem die beiden Maßstrecken, die hier die Einheiten des Koordinatensystems angeben.
Will man eine Stelle genauer betrachten, z.B. den Punkt A, dann kann man auf demselben endlichen Ebenenstück nur den Ausschnitt unterbringen, der oben etwas heller unterlegt ist. Die mittlere Abbildung ist gegenüber der oberen mit dem Faktor 2 in beiden Achsenrichtungen vergrößert. Das hat zur Folge, daß – wie erwünscht – in diesem Bild dieselbe Länge der Maßstrecken nunmehr die halbe Einheit des Koordinatensystems bedeutet. Die beiden noch sichtbaren Winkel des Dreiecks sind genau so groß wie in der oberen Abbildung. Das gleiche gilt auch für den dritten, nicht mehr sichtbaren Winkel, da in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme 180° beträgt. Die Tangente ist auch hier eine Gerade. Dagegen erscheint die Kreislinie etwas gestreckter.
Eine nochmalige Vergrößerung mit dem Faktor 3 liefert (als insgesamt 6-fache Vergrößerung) schon eine recht genaue Einsicht in die Ecke bei A (unteres Bild). Die beiden Maßstrecken bedeuten jetzt noch 1/6 der Einheiten des Koordinatensystems. Die beiden noch im Ausschnitt erfaßten Dreiecksseiten und die Tangente bilden zueinander Winkel von derselben Größe wie in den Bildern darüber. Die Kreislinie ist noch gestreckter, wodurch eindringlich sichtbar wird, wie sich der Kreis an die Tangente anschmiegt.
Die Überlegung, was sich bei noch stärkerer Vergrößerung an der Darstellung verändert, führt zu folgendem Satz:

Satz 1 (von den finiten Vergrößerungen)

Vergrößert man einen Kreis mit einbeschriebenem, rechtwinkligem Dreieck ABC und Tangente in A in beiden Achsenrichtungen um denselben finiten Faktor, so gilt:
a) Winkelgrößen bleiben erhalten,
b) Geraden bleiben Geraden,
c) je größer der Faktor, desto stärker erscheint ein Kreisbogen gestreckt.

M 1.3 Infinite (unendliche) Vergrößerungen

Geraden und Kreis kann man auch mit einem infiniten Faktor vergrößern. Dies geschieht nun am Punkt A. Da für die Darstellung wieder nur ein begrenztes Ebenenstück zur Verfügung steht, muß der zu vergrößernde Ausschnitt von infinitesimaler Größe, d.h. unendlich klein sein. Das bedeutet, daß in solch einem Ausschnitt nur ein einziger (reeller) Punkt, nämlich A selbst, liegt. Demzufolge erscheint er in der infiniten (unendlich starken) Vergrößerung ebenfalls als einziger Punkt, denn der „nächste" reelle Nachbarpunkt liegt in infiniter Entfernung, also unendlich weit weg.
Wenn man aber den Kreis als Funktion ins Hyperreelle erweitert, dann besitzt jeder reelle Punkt infinitesimale Nachbarn, die durch die Vergrößerung überhaupt erst sichtbar werden können.
Auf der Folie 1 sieht man eine Vergrößerung mit dem Faktor Ω; die Zahl Ω hat die Darstellung $\Omega = (1; 2; 3; ...)$. Der vergrößerte Ausschnitt enthält A als einzigen reellen Punkt. Die beiden Maßstrecken bedeuten jetzt die Länge $1/\Omega$. Da $1/\Omega = \omega$ infinitesimal ist, sind alle anderen Punkte in der Vergrößerung zu A infinitesimal benachbart, was sowohl für Kreislinie und Tangente als auch für die beiden Dreiecksseiten gilt. In der Zeichnung fällt auf, daß Kreislinie und Tangente nicht zu unterscheiden sind. Dies und die sinngemäße Anwendung des Satzes 1 führt zu

Satz 2 (von den infiniten Vergrößerungen)

Bei infiniter Vergrößerung einer graphischen Darstellung gilt:
a) Winkel bleiben erhalten,
b) Geraden bleiben Geraden,
c) Kreisbögen werden infinit gestreckt, werden somit zu Geraden und sind von der Tangente an den Kreis nicht mehr zu unterscheiden.

Beweis

Da a) und b) anschaulich klar sind, beschränkt sich der Beweis auf Teil c). Dazu sei noch einmal das rechtwinklige Dreieck ABC betrachtet, in das nun zusätzlich die Strecken mit den Längen a und h eingezeichnet sind (vgl. Abb. 1).

Zu untersuchen ist, ob bei einem Kreispunkt B, der zum Tangentenberührpunkt A infinitesimal benachbart ist, die Strecken mit den Längen h und a bei infiniter Vergrößerung gleichzeitig sichtbar werden oder ob a immer noch infinite-

simal lang ist, wenn h finit lang gezeichnet werden kann.
Zum Verständnis der geometrischen Beziehungen sei zunächst der Punkt B in „normaler" Vergrößerung und damit in finiter Entfernung von A betrachtet.
Da $\overline{AC}$ ein Durchmesser des Kreises ist, liegt nach dem Satz des Thales im Punkt B immer ein rechter Winkel. Es gilt somit im Dreieck ABC der Höhensatz, wobei die Hypotenusenabschnitte die Längen a und (d – a) besitzen (d ist der finite Kreisdurchmesser). Man erhält für den Höhensatz

$h^2 = a \cdot (d - a)$

und damit – weil h positiv ist –

$$h = \sqrt{a} \cdot \sqrt{d - a}.$$

Sei h nun infinitesimal, so ist es das Produkt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{d - a}$ ebenfalls. Hier muß einer der beiden Faktoren infinitesimal sein. Wir wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sqrt{a}$ als infinitesimal. Es ist dann $\sqrt{d-a}$ nicht infinitesimal.

Wegen $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ist auch die Länge a, also der Abstand des Punktes B von der Tangente infinitesimal. Für den Quotienten der Längen a und h ergibt sich

$$\frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{d - a}},$$

und nach Kürzen erhält man

$$\frac{a}{h} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d - a}}.$$

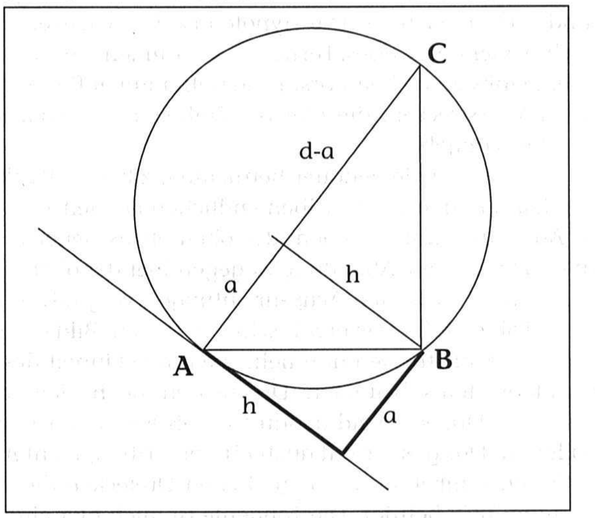
Diese Quotientengleichung gilt auch, wenn man den Kreisbogen bei A derart infinit vergrößert, daß h mit finiter Länge gezeichnet werden kann (beispielsweise mit dem Faktor 1/h, denn es gilt $h \cdot 1/h = 1$). Da in ihr die infinitesimale Länge $\sqrt{a}$ durch die finite Länge $\sqrt{d-a}$ dividiert wird, ist auch der Quotient a/h infinitesimal. Da h in dieser Vergrößerung finit lang gezeichnet werden kann, bedeutet dies nun, daß die Länge a bei dieser Vergrößerung immer noch infinitesimal ist.

Um a mit finiter Länge zeichnen zu können, müßte man noch eine weitere infinite Vergrößerung vornehmen. Dies hätte aber zur Folge, daß die Länge h infinit lang gezeichnet werden müßte, da der Quotient a/h auf jeden Fall eine infinitesimale Zahl ist; h wäre damit aber prinzipiell nicht mehr zeichenbar.

Zusammengefaßt bedeutet das, daß zwar sowohl h als auch a infinitesimale Größen sind, aber die Infinitesimalzahl a ist von anderer Größenordnung als h und ist nicht zusammen mit h darstellbar.

Wenn die infinitesimale Höhe h über der x-Achse durch infinite Vergrößerung sichtbar ist, ist der Abstand des Kreispunktes von der Tangente noch nicht sichtbar; der Kreisbogen erscheint also bei dieser Vergrößerung als Gerade.
Damit ist der Satz bewiesen.

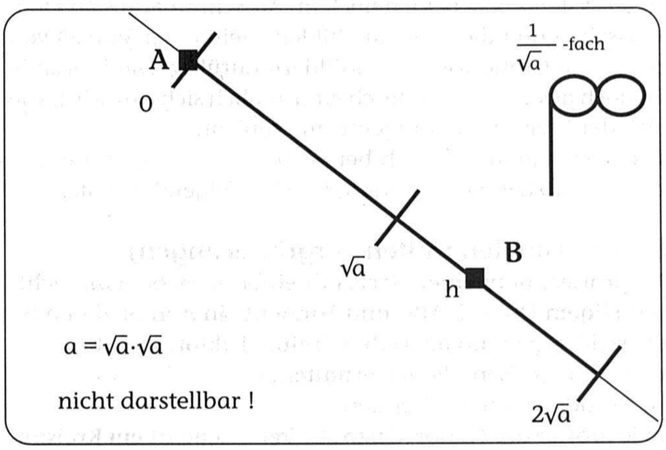
zu M 1.3 Lösung



$h^2 = a(d - a)$

für d = 2 gilt: $h = \sqrt{a}\,\sqrt{2-a}$

für 0 < a, a infinitesimal, gilt: $\sqrt{a} < h < 2\sqrt{a}$



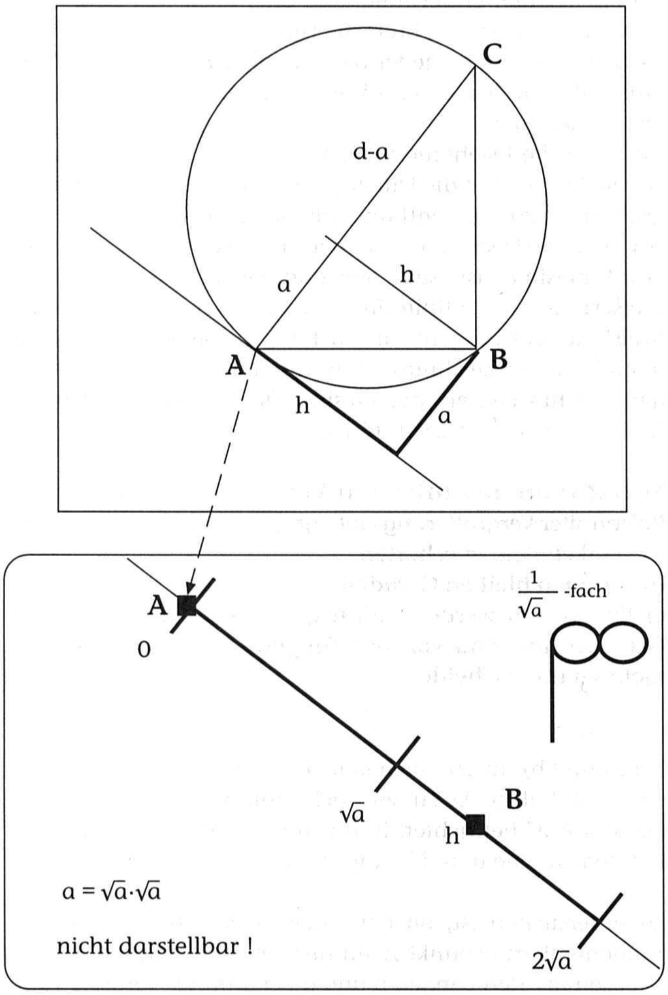
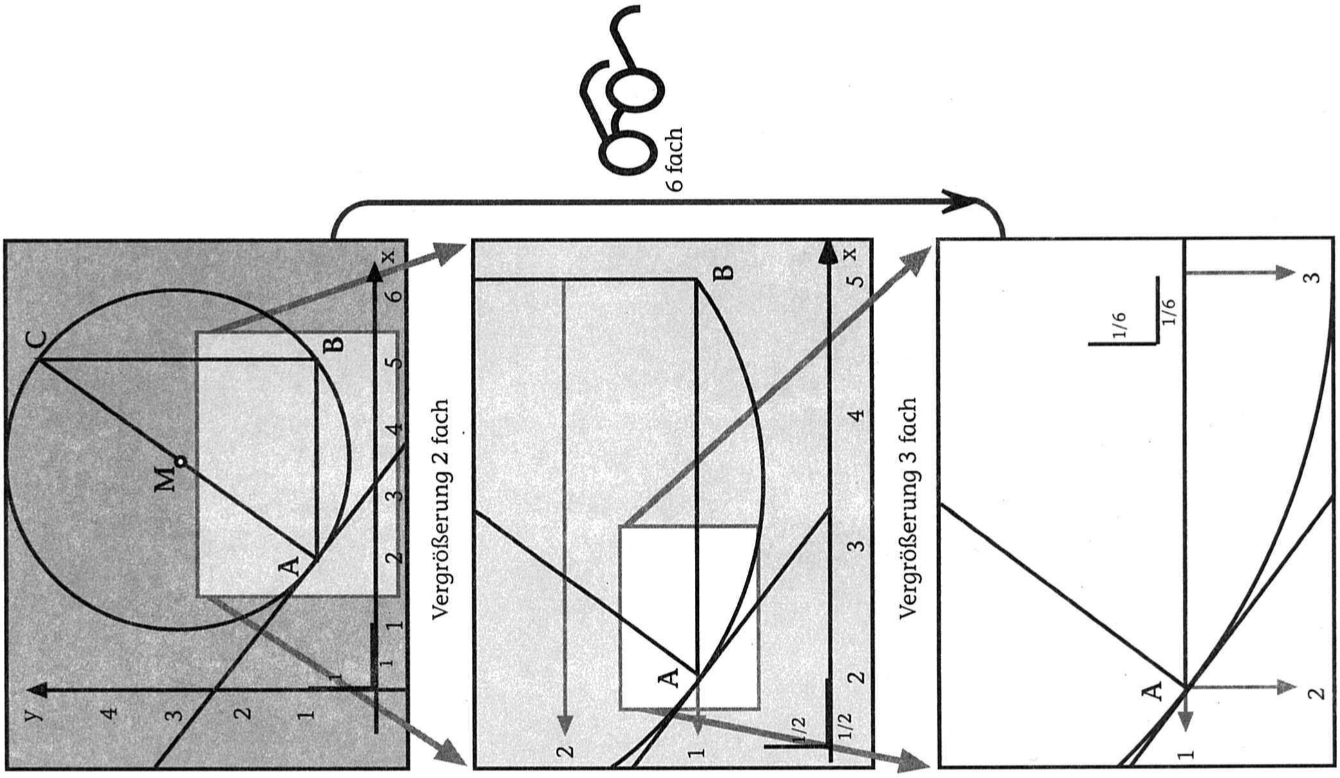


Abb. 1

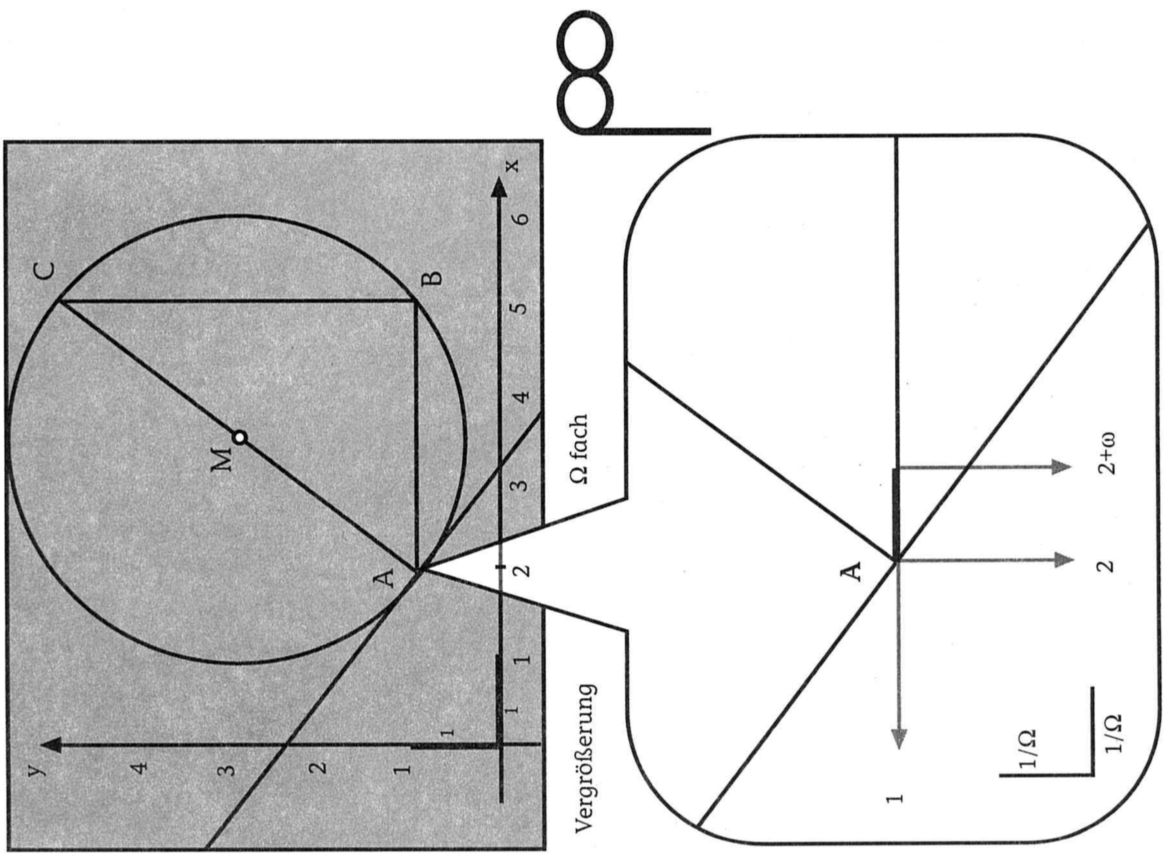
Abb. 2

Folie 1

M 1.2 Finite (endliche) Vergrößerungen



M 1.3 Infinite (unendliche) Vergrößerungen



M 1.4 Infinitesimale Größenordnungen

Die bei der infiniten Vergrößerung eines Kreises gewonnenen Erkenntnisse lassen sich verallgemeinern. Dazu sei noch einmal dargestellt, wie stark jeweils die Strecken mit den Längen a und h vergrößert werden müssen, damit sie mit finiter Länge zeichenbar sind.

Länge bei „normaler“ Vergrößerung		Länge bei infiniter Vergrößerung		Länge bei erneuter infiniter Vergrößerung
h infinitesimal	$\longrightarrow$	h finit	$\longrightarrow$	h infinit
	$\cdot \frac{1}{h}$		$\cdot \frac{1}{h}$	
a infinitesimal	$\longrightarrow$	a infinitesimal	$\longrightarrow$	a finit

Aufgabe

Was kann über die zu zeichnenden Streckenlängen a und h gesagt werden, wenn man noch ein drittes Mal infinit vergrößert?

Lösung:
h und a sind beide infinit lang.

Die Untersuchung ergab, daß der Quotient a/h immer infinitesimal ist. Mit der gleichen Berechtigung hätte man auch den Quotienten h/a betrachten können, der als Kehrwert zu a/h natürlich immer infinit ist. Mit einer ähnlichen Schlußfolgerung hätte man auch für diesen infiniten Quotienten zweier infinitesimaler Zahlen herausbekommen, daß h und a bei gleich starker infiniter Vergrößerung nicht beide eine finite Länge erhalten.
Es ist leicht einzusehen, daß a und h bei gleicher Vergrößerung zeichenbar wären, wenn ihr Quotient weder infinit noch infinitesimal wäre. Dies führt zum

Satz 3 (von den infinitesimalen Größenordnungen)

Zwei infinitesimale Größen sind genau dann bei gleicher Vergrößerung mit finiter Länge zeichenbar, wenn ihr Quotient weder infinit noch infinitesimal ist.

2 Tangente an einer Parabel

M 2.1 Zeichnerische Bestimmung der Tangente

Problemstellung: Läßt sich auch für eine Kurve wie die Normalparabel eine Tangente definieren?
Die Erkenntnis, daß die Kreislinie bei infiniter Vergrößerung als Gerade zu zeichnen ist, legt nahe, dies auch bei der Normalparabel zu untersuchen. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ soll an einem Punkt $P = (x_0; f(x_0)) = (x_0; x_0^2)$ infinit vergrößert werden. Wie ist er dann zu zeichnen?
Der obere Teil der Folie 2 zeigt den Graphen von $f(x) = x^2$ mit dem Punkt $P = (2; f(2))$ in „normaler" Vergrößerung, daneben ein Koordinatenkreuz mit P, allerdings nicht bis zum Ursprung durchgezeichnet, sondern jeweils mit Lücken zur Andeutung der infiniten Entfernung bis dorthin.
Folie 2 (unterer Teil) bzw. Abb. 1 auf dieser Seite: In der infiniten Vergrößerung ist eine Gerade durch P mit der Steigung 4 abgebildet, auf der der weitere Punkt $Q = (2 + \alpha; (2 + \alpha)^2)$ eingezeichnet ist. Auf den Achsen sind auch die Stellen $x = 2 + \alpha$ und $y = 4 + 4\alpha$ vermerkt.
Durch den Punkt P verläuft der Graph der hyperreell erweiterten Funktion. Ein infinitesimal benachbarter Punkt des Funktionsgraphen ist $Q = (2 + \alpha; f(2 + \alpha)) = (2 + \alpha; (2 + \alpha)^2) = (2 + \alpha; 4 + 4\alpha + \alpha^2)$.
Das bedeutet, daß bei infinitesimaler Veränderung des x-Wertes um α sich der Graph um $4\alpha + \alpha^2$ in y-Richtung verändert. In der um $1/\alpha$ infinit vergrößerten Darstellung ist aber nur die Verschiebung um 4α darstellbar. Die durch α^2 bewirkte Veränderung ist nicht zeichenbar, denn man müßte sie auf die Einheit α beziehen, d.h. den Quotienten α^2/α bilden. Dieser ist aber infinitesimal, daher wird α^2 erst bei erneuter infiniter Vergrößerung bei Q zeichenbar.

Aufgabe

Geben Sie den gesamten Vergrößerungsfaktor an, mit dem α^2 sichtbar gemacht werden kann. Welche Auswirkung ergibt sich für den Punkt P?

Lösung: Der Vergrößerungsfaktor ist _____; P kann dann nicht mehr in endlicher Entfernung von Q gezeichnet werden.
Da dies für jede beliebige infinitesimale Veränderung α gilt, muß der Graph in dieser Vergrößerung eine Gerade sein. Da eine Krümmung nicht mehr erkennbar ist, hätte auch eine bestimmte „echte" Gerade durch P dasselbe infinit vergrößerte Bild. Analog zum Kreis soll diese spezielle Gerade die Tangente an die Kurve im Punkt P genannt werden. Dies führt zur

Definition 1
(Graphen differenzierbarer Funktionen)

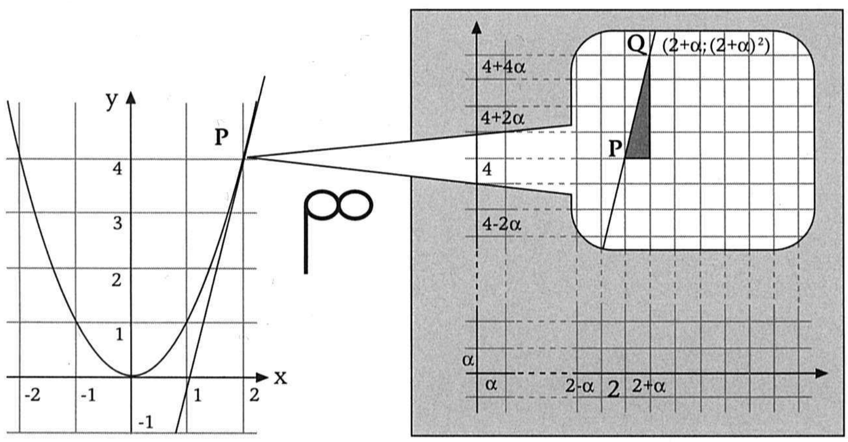
Erscheint der Graph G_f einer (hyperreell erweiterten) Funktion f bei infiniter Vergrößerung an einem reellen Punkt P gerade, läßt er sich zeichnerisch nicht von einer (hyperreell erweiterten) Geraden g unterscheiden, so heißt g Tangente an G_f in P. Die Bilder von Tangente und Kurve stimmen bei dieser Vergrößerung überein. Man sagt, die Funktion ist an dieser Stelle differenzierbar. Ist dies an allen Punkten eines Graphen der Fall, so heißt die gesamte Funktion differenzierbar.

Die Steigung der ins Hyperreelle erweiterten Tangente kann man berechnen. Sie ergibt sich aus dem Längenverhältnis der Katheten im zeichenbaren Steigungsdreieck zwischen den infinitesimal benachbarten Punkten P und Q.

Man erhält im obigen Beispiel $m_t = \frac{4\alpha}{\alpha} = 4$, also einen reellen Wert.
Diese Steigung wird in P auch für die Normalparabel als Steigung erklärt, denn man zeichnet sie bei infiniter Vergrößerung mit derselben Steigung wie die Tangente.
Sie läßt sich aber auch algebraisch bestimmen. Bildet man für die Normalparabel den Quotienten der Werte, um den sich die Koordinaten verändern, so erhält man $\frac{4\alpha + \alpha^2}{\alpha} = 4 + \alpha$. Der Summand α ist infinitesimal. Vergleicht man die Änderungsquotienten der Normalparabel und ihrer Tangente zwischen dem reellen Punkt P und seinem infinitesimalen Nachbarn Q – nämlich $(4 + \alpha)$ – mit 4, so erkennt man, daß der Unterschied infinitesimal ist. Der reelle Teil dieses Quotienten der (hyperreell erweiterten) Normalparabel und die Steigung der Tangente stimmen also, unabhängig von der Wahl des zu P infinitesimal benachbarten Punktes Q, überein. Für eine reelle Funktion läßt sich damit die (reelle) Steigung ihres Graphen im Punkt P festlegen.

Definition 2 (Steigung eines Graphen)

Die Steigung des Graphen einer reellen Funktion in einem Punkt P stimmt mit der Steigung ihrer Tangente in diesem Punkt überein. Sie ist gleich dem reellen Teil des Änderungsquotienten für zwei infinitesimal benachbarte Kurvenpunkte ihrer hyperreellen Erweiterung.

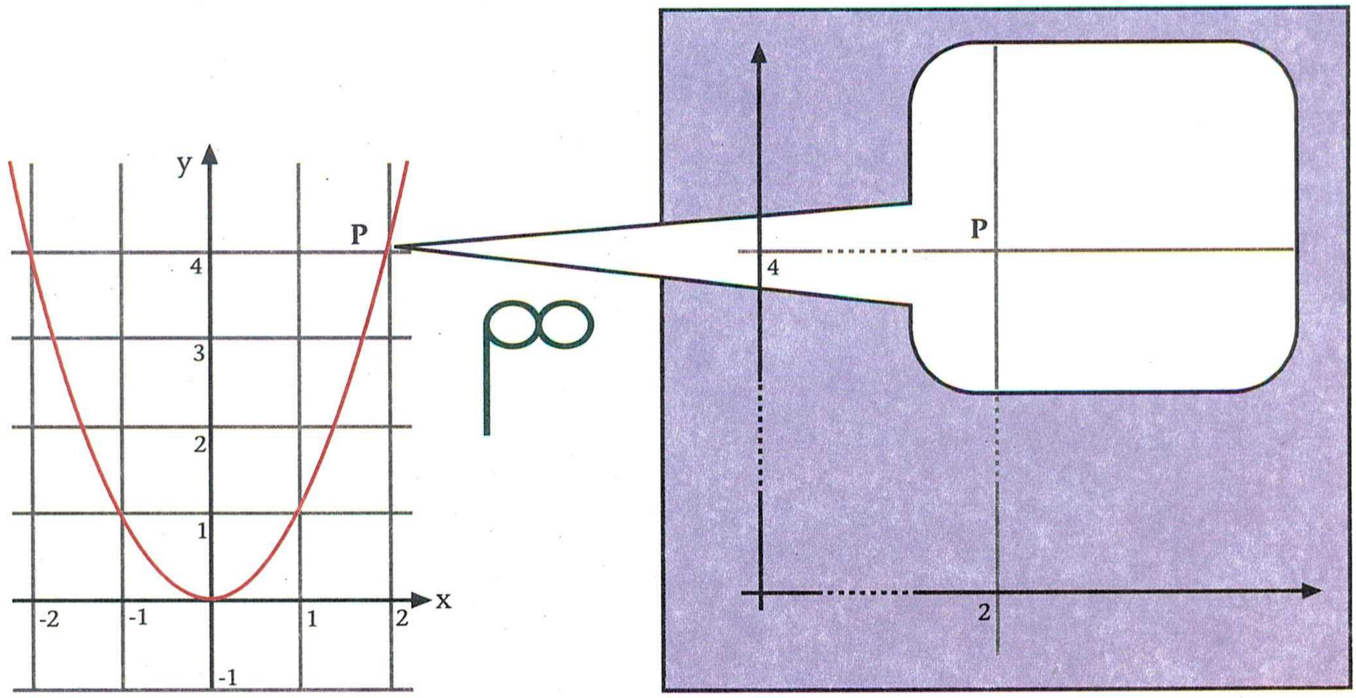


Parabel und Tangente
Abb. 1

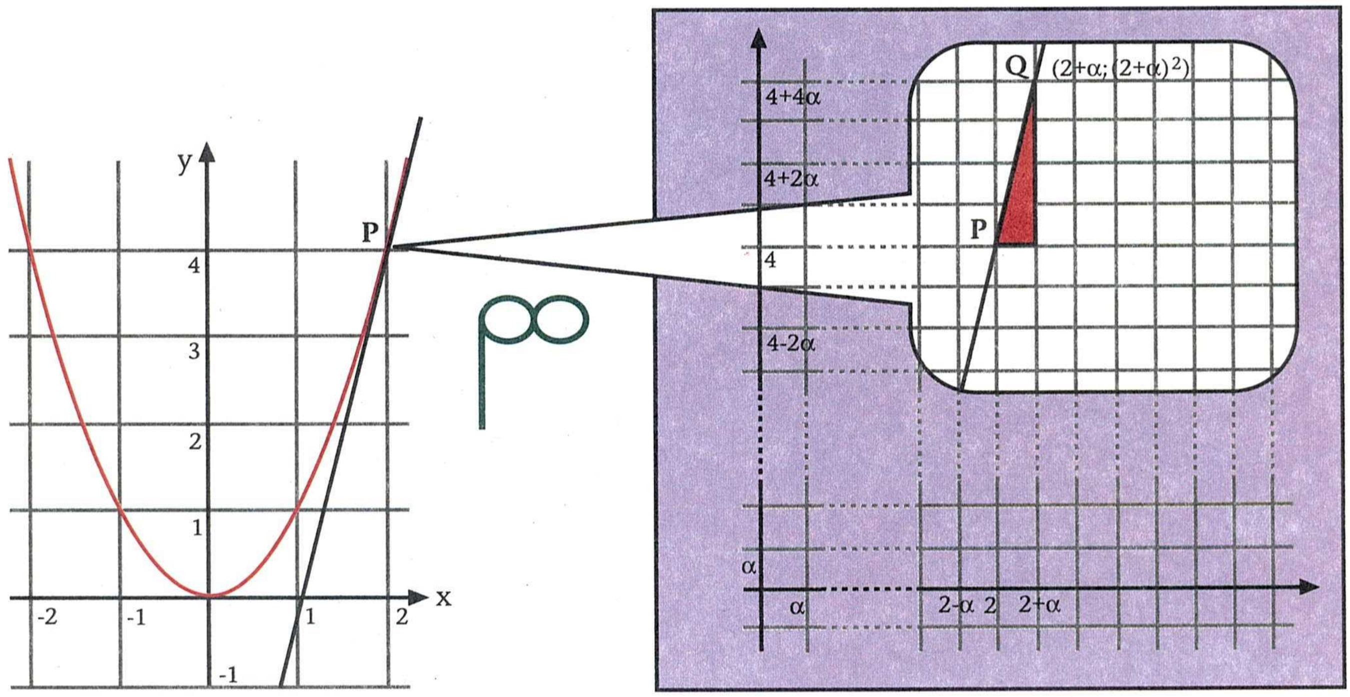
Folie 2

M 2.1 Zeichnerische Bestimmung der Tangente

Infinite Vergrößerung einer reellen Parabel



Parabel und Tangente



M 2.2 Die Leibnizsche Sprech- und Schreibweise

Die infinitesimal benachbarten Punkte P und Q unterscheiden sich in ihren x-Koordinaten um deren Differenz α, einem infinitesimalen Wert. Aus historischen Gründen nennt man eine infinitesimale Differenz ein Differential und bezeichnet es mit dx. Entsprechend unterscheiden sich die y-Koordinaten beider Punkte um dy. Mit solchen Differentialen (Infinitesimalzahlen) kann man rechnen. Dividiert man beispielsweise zwei Differentiale, so ergibt sich ein Differentialquotient. Folglich bezeichnet man dieses Gebiet der Mathematik als Differentialrechnung. Diese Begriffe und Schreibweisen gehen auf Leibniz zurück, der diesen Zweig der Mathematik maßgeblich entwickelte. Sie sind noch heute üblich und sollen im folgenden ausschließlich verwendet werden.

M 2.3 Berechnung der Steigung der Normalparabel im Punkt P

Problemstellung

Wie groß ist die Steigung der Kurve im Punkt P = (2; 4) der Normalparabel $f(x) = x^2$?

Problemlösung

Anhand der infinit vergrößerten Darstellung der Normalparabel ist dies weitgehend vorbereitet. Dort erscheint sie als Gerade, die die beiden infinitesimal benachbarten Punkte P und Q enthält. Kurve und Tangente fallen (zeichnerisch) zusammen.
Rechnerisch bestimmt man die Steigung der (reellen) Kurve, indem man nach hyperreeller Erweiterung der Funktion zunächst den Quotienten aus den Koordinatendifferenzen zwischen den infinitesimal benachbarten hyperreellen Punkten P und Q berechnet. Der reelle Teil dieses Wertes ist dann die gesuchte Steigung.
In der Leibnizschen Sprech- und Schreibweise heißt das, daß man den reellen Teil des Differentialquotienten für P und Q berechnen muß.

Für die infinitesimal benachbarten Punkte $P = (x_0; f(x_0))$ und $Q=(x_1; f(x_1))$ ergeben sich die Differentiale $dx = x_1 - x_0$ und $dy = f(x_1) - f(x_0)$. Der Differentialquotient ist dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Für die betrachtete Normalparabel sei also $P = (2; f(2)) = (2; 4)$. Den infinitesimal benachbarten Punkt Q kann man frei wählen, er sei

$$Q = (2 + dx; f(2 + dx))$$
$$= (2 + dx; 4 + 4dx + (dx)^2).$$

Für die Differentiale erhält man $dx = x_1 - x_0$ und $dy = f(x_1) - f(x_0) = f(2 + dx) - f(2)$. Daraus ergibt sich der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(2 + dx) - f(2)}{dx}$$
$$= \frac{4 + 4dx + (dx)^2 - 4}{dx}$$
$$= \frac{4dx + (dx)^2}{dx}.$$

Nachdem man dx zunächst im Zähler ausgeklammert und dann gekürzt hat, erhält man schließlich

$$\frac{dy}{dx} = 4 + dx.$$

Der reelle Teil davon ist

$$RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT(4 + dx) = 4.$$

Dies ist die Steigung der Tangente und damit der Kurve in P.
Dieses Ergebnis wird verallgemeinert in der folgenden Definition.

Definition 3

Besitzen alle Differentialquotienten in einem Punkt $P=(x_0; f(x_0))$ eines Funktionsgraphen denselben reellen Teil, so nennt man ihn die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0, kurz geschrieben

$$f'(x_0) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

andernfalls nicht.

M 2.4 Anwendung und Übung

Aufgaben

Berechnen Sie die Steigung der Normalparabel $f(x) = x^2$ für die folgenden Stellen x_0. Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Differentialrechnung.

a) $x_0 = 3$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 0$
d) $x_0 = -1$.

3 Ableitungsfunktion

M 3.1 Die Ableitungsfunktion zu $f(x) = x^2$

Problemstellung

Bei der Normalparabel ergaben sich an verschiedenen Punkten des Graphen auch verschiedene Steigungen. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da der Graph gekrümmt ist und somit die Tangenten nicht parallel verlaufen. Die Steigungen zu einer Funktion bilden also selbst eine Funktion, die Steigungsfunktion. Man nennt sie auch die 1. Ableitungsfunktion.
Kann man für sie einen geschlossenen Term ermitteln?

Problemlösung

Da die Berechnung der Steigungen für alle x-Werte auf die gleiche Weise erfolgte, liegt es nahe, statt mit konkreten Zahlen die 1. Ableitungsfunktion gleich mit der Variablen x zu berechnen.
Es sei also ein beliebiger, aber fester reeller Punkt $P = (x; f(x)) = (x; x^2)$ der Normalparabel gegeben. Infinitesimal benachbart dazu liegt der Punkt $Q = (x + dx; f(x + dx)) = (x + dx; (x + dx)^2)$. Der Differentialquotient ergibt sich dann zu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx.$$

Hierin ist x reell, so daß sich der reelle Teil dieses Terms bilden läßt. Er lautet

$$RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT(2x + dx) = 2x.$$

Die Steigung der Normalparabel läßt sich für jede Stelle x bestimmen; man erhält so die abgeleitete Funktion, die 1. Ableitung. Es gilt somit der

Satz 4

Die 1. Ableitung f′ der Funktion f mit $f(x) = x^2$ wird beschrieben durch $f'(x) = 2x$.

Anmerkung: Erst hierdurch wird die Schreibweise $f'(2) = 4$ in Definition 3 verständlich.

M 3.2 Ableitung einfacher Potenzfunktionen

Aufgaben

Bestimmen Sie auch von folgenden Potenzfunktionen die 1. Ableitung als Funktion:

a) *$f(x) = x^3$*

b) *$g(x) = x^4$*

4 Einfache Ableitungsregeln

Problemstellung

Eine ganzrationale Funktion ergibt sich durch Aufsummieren unterschiedlicher Potenzfunktionen, deren jede noch mit einem Faktor multipliziert sein kann. Lassen sich allgemeine Regeln für die Ableitung ganzrationaler Funktionen aufstellen?

M 4.1 Potenzregel

Die bisherigen Beispiele zeigen Gemeinsamkeiten im Vorgehen. Zunächst fielen die Summanden ohne dx weg, anschließend konnte gekürzt werden. Daher soll nun die 1. Ableitung einer Potenzfunktion im allgemeinen bestimmt werden. Wie bisher ist der reelle Teil des Differentialquotienten der hyperreell erweiterten Potenzfunktion f zu berechnen.

Sei $n \geq 2$ und $dx \neq 0$ infinitesimal, so ergibt er sich zu $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x + dx)^n - x^n}{dx}$. Der Zähler stellt eine Differenz zweier Potenzen mit gleichen Exponenten dar. Mit Hilfe der „dritten binomischen Formel höherer Ordnung" $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ kann er umgeformt werden, so daß man für den Differentialquotienten

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{[(x + dx) - x][(x + dx)^{n-1} + (x + dx)^{n-2}x + \ldots + (x + dx)x^{n-2} + x^{n-1}]}{dx}$$

erhält.

Im ersten Faktor fallen die Summanden ohne den Faktor dx weg und es ergibt sich

$\frac{dx}{dx}[(x + dx)^{n-1} + (x + dx)^{n-2} x + \ldots + (x + dx)x^{n-2} + x^{n-1}]$. Man bildet schließlich, nachdem der Bruch durch Kürzen weggefallen ist, den reellen Teil des Terms und erhält

$$\begin{aligned} RT\left(\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}\right) &= RT((x + dx)^{n-1} + (x + dx)^{n-2} x + \ldots + (x + dx)\, x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \ldots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

da die Summe insgesamt n Summanden enthält. Es gilt also der

Satz 5

Sei $f(x) = x^n$ gegeben mit $x \in \mathbb{R}$ sowie $n \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

M 4.2
Identitäts- und Konstantenregel

Aufgaben

Errechnen Sie die 1. Ableitungen der Funktionen mit folgenden Gleichungen:

a) *$f(x) = x$*

b) *$g(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$*

M 4.3
Summen- und Faktorregel

Aufgaben

Beweisen Sie die folgenden Sätze:

Satz 6

Sei die Summe zweier reeller Funktionen mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gegeben. Dann gilt für die 1. Ableitung der Summe $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. (Oder kurz: $(f + g)' = f' + g'$.)

Satz 7

Sei eine Funktion g mit einem konstanten reellen Faktor a multipliziert, also $f(x) = a \cdot g(x)$. Dann gilt für die 1. Ableitung $f'(x) = a \cdot g'(x)$. Der konstante Faktor bleibt also beim Bilden der 1. Ableitung erhalten.

5 Ableitungsfunktionen anderer Funktionen

Die bisherigen Regeln machen es möglich, jeweils die Ableitungsfunktion ganzrationaler Funktionen, das sind Funktionen p mit Funktionsgleichungen der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, zu bestimmen. Es soll nun versucht werden, den reellen Teil der Differentialquotienten bei anderen Funktionen und damit die Steigung ihrer Graphen zu ermitteln.

M 5.1 Ableitung der Wurzelfunktion

Die Funktionsgleichung der Wurzelfunktion lautet $f(x) = \sqrt{x}$. Für $x > 0$, $dx \neq 0$ und dx infinitesimal ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{x + dx} - \sqrt{x}}{dx}$$

$$= \frac{\sqrt{x + dx} - \sqrt{x}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x + dx) - x}{dx \cdot (\sqrt{x + dx} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}} .$$

Hiervon bildet man den reellen Teil, also

$$RT\left(\frac{1}{\sqrt{x + dx} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

und somit gilt der

Satz 8 (Ableitung der Wurzelfunktion)

Die Ableitung der Wurzelfunktion $f: x \to \sqrt{x}$, $x > 0$ lautet $f': x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

M 5.2 Ableitung der Kehrwertfunktion

Bei der Kehrwertfunktion errechnet sich jeder Differentialquotient auf die folgende Weise. Es gelte $x \neq 0$, $dx \neq 0$, dx infinitesimal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x}}{dx}$$

$$= \frac{\frac{x - (x + dx)}{(x + dx) \cdot x}}{dx}$$

$$= \frac{x - (x + dx)}{dx[(x + dx) \cdot x]}$$

$$= \frac{-1}{(x + dx) \cdot x} .$$

Schließlich bilden wir den reellen Teil und erhalten

$$RT\left(\frac{-1}{(x + dx) \cdot x}\right) = \frac{-1}{x^2} .$$

Es gilt also der

Satz 9 (Ableitung der Kehrwertfunktion)

Die Ableitung der Kehrwertfunktion $f: x \to \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ lautet $f': x \to \frac{-1}{x^2}$.

Aufgaben

Formulieren Sie die Aussagen der Sätze für die 1. Ableitungen der Wurzel- bzw. der Kehrwertfunktion mit Hilfe von Potenzausdrücken mit rationalen Exponenten. Vergleichen Sie diese Formulierungen mit der Potenzregel.

M 5.3 Ableitung von Sinus und Kosinus

Auch für die Sinusfunktion lassen sich (nach Erweiterung ins Hyperreelle) die Differentialquotienten bestimmen. Es ergibt sich für f mit $f(x) = \sin(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x + dx) - \sin(x)}{dx}.$$

Der Zähler muß infinitesimal sein, aber von derselben Größenordnung wie dx, da sich sonst kein finiter Quotient ergibt. Es führt aber nicht weiter, den Zähler nach dem entsprechenden Additionstheorem umzuformen, so daß man $\sin(x + dx) - \sin(x) = 2\sin(\frac{dx}{2})\cos(\frac{2x + dx}{2})$ erhält.

Beim Übergang zum reellen Teil

$2 \cdot RT(\sin(\frac{1}{2}dx)) \cdot \cos(x)$ bleibt nämlich offen, welchen reellen Teil der Sinus der Infinitesimalzahl $\frac{dx}{2}$ besitzt.

Weiterhin ist nicht geklärt, ob $RT(\cos(x)) = \cos(RT(x))$ für finite, nicht reelle x-Werte gilt.
Statt dessen soll die 1. Ableitung der Sinusfunktion geometrisch bestimmt werden.

Die Abbildung zu M 5.3 zeigt einen Ausschnitt des kartesischen Koordinatensystems mit dem Einheitskreis im Quadranten I. Da f mit $f(x) = \sin(x)$ eine Funktion des Winkels bzw. der Bogenlänge im Einheitskreis ist, stellt der ausschnitthafte Kreisbogen die x-Achse dar und besitzt demzufolge in Richtung wachsender x-Werte eine Pfeilspitze und die Bezeichnung x. Auf den beiden rechtwinkligen Zahlengeraden sind dann die Funktionswerte von $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$ ablesbar, weswegen sie diese Bezeichnungen erhalten. Für einen beliebigen, aber festen Wert x_0 sind die Verhältnisse sowohl durch den Winkel als auch durch die entsprechende Stelle auf dem Einheitskreis dargestellt.
An der Stelle x_0 ist der Kreisbogen weiterhin infinit vergrößert dargestellt. Er erscheint bekanntlich als Gerade, auf der die Werte x_0 und $x_0 + dx$ voneinander unterscheidbar sind. Ferner sind zu Punkt P der Radius sowie zu den Punkten P und Q die Lote zur cos- bzw. sin-Achse angedeutet, da sie infinit lang zu zeichnen wären. Es entsteht dabei das rechtwinklige Dreieck PQR, das wir nun betrachten.
Trotz der verschiedenen Maßstäbe gelten die geometrischen Beziehungen fort. So befinden sich bei P zwei Winkel mit der Größe x_0. Zum einen als Stufenwinkel zum Winkel im Ursprung, zum anderen im rechten Winkel dazu. Zu letzterem wiederum taucht ein Winkel x_0 bei Q als Stufenwinkel auf.
In diesem infinitesimalen Dreieck ist nun unmittelbar abzulesen, daß

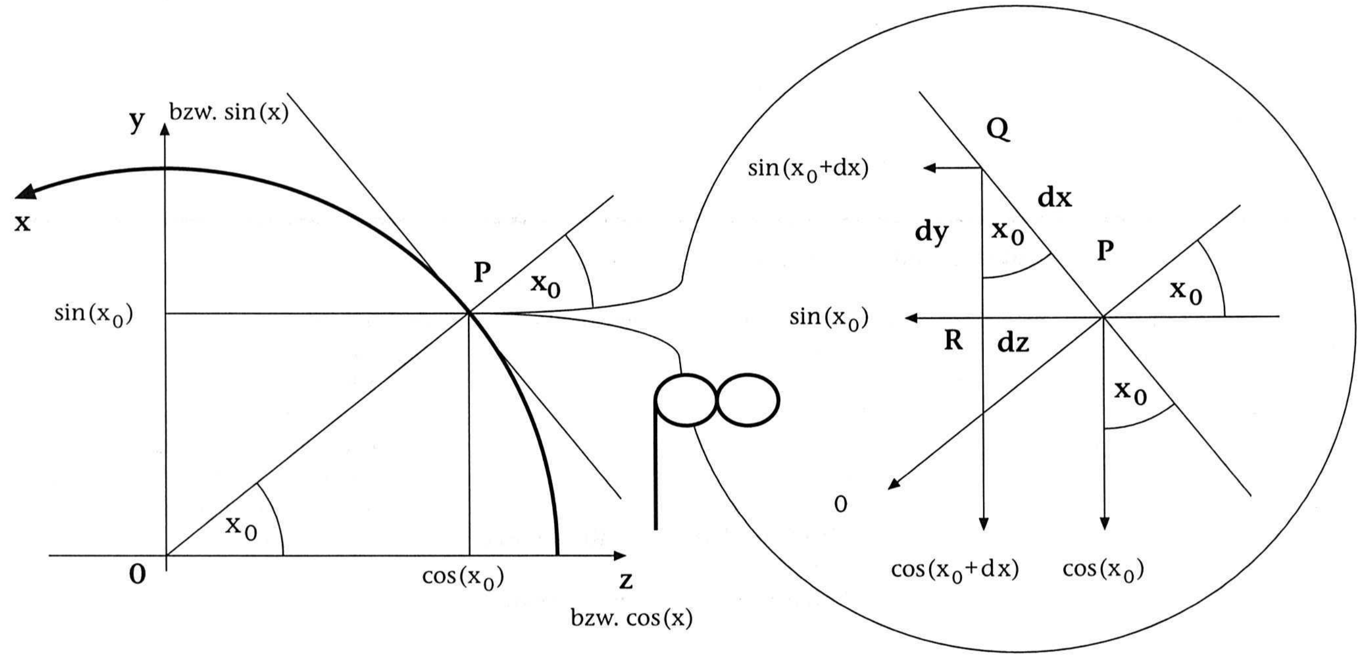
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x_0 + dx) - \sin(x_0)}{dx} = \cos(x_0)$$

gilt. Da x_0 reell ist, bleibt dieser Wert beim Übergang zum reellen Teil erhalten: $RT(\cos(x_0)) = \cos(x_0)$. Da x_0 beliebig war, können wir ohne Index schreiben:

Satz 10
(Ableitung der Sinusfunktion)
Die Ableitung der Sinusfunktion $f: x \to \sin(x)$ lautet $f': x \to \cos(x)$.

Aufgabe
Bestimmen Sie ebenfalls anhand der Zeichnung die 1. Ableitung der Kosinusfunktion. Beachten Sie dabei, daß für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $dx > 0$ $\cos(x + dx) < \cos(x)$ gilt.

Differentialquotienten von Sinus und Kosinus



zu M 5.3 Lösungen

Merke
Bei infiniten Vergrößerungen sind genau die wesentlichen reellen Teile sichtbar!

Für Sinus

$$RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT\left(\frac{\sin(x_0 + dx) - \sin(x_0)}{dx}\right) = RT(\cos(x_0)) = \cos(x_0)$$

Für Kosinus

Zu beachten ist, daß $\cos(x_0 + dx) < \cos(x_0)$

$$RT\left(\frac{dz}{dx}\right) = RT\left(\frac{\cos(x_0 + dx) - \cos(x_0)}{dx}\right) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT(-\sin(x_0)) = -\sin(x_0)$$

6 Weitere Ableitungsregeln

Mit den bisherigen Regeln lassen sich zwar von vielen Funktionen die Ableitungsfunktionen berechnen, allerdings erlauben sie nicht, z.B. Funktionen mit Funktionsgleichungen wie $f(x) = x \cdot \sin(x)$ oder $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$ zu bestimmen. Im ersten Fall ist das Produkt zweier Funktionen abzuleiten, im zweiten Fall sind Funktionen miteinander verkettet, d.h. auf x wird zunächst die Sinusfunktion angewendet und vom Ergebnis wird dann die Wurzel gezogen. Für die Ableitung derartiger Funktionen sollen nun Regeln gefunden werden.

M 6.1 Produktregel

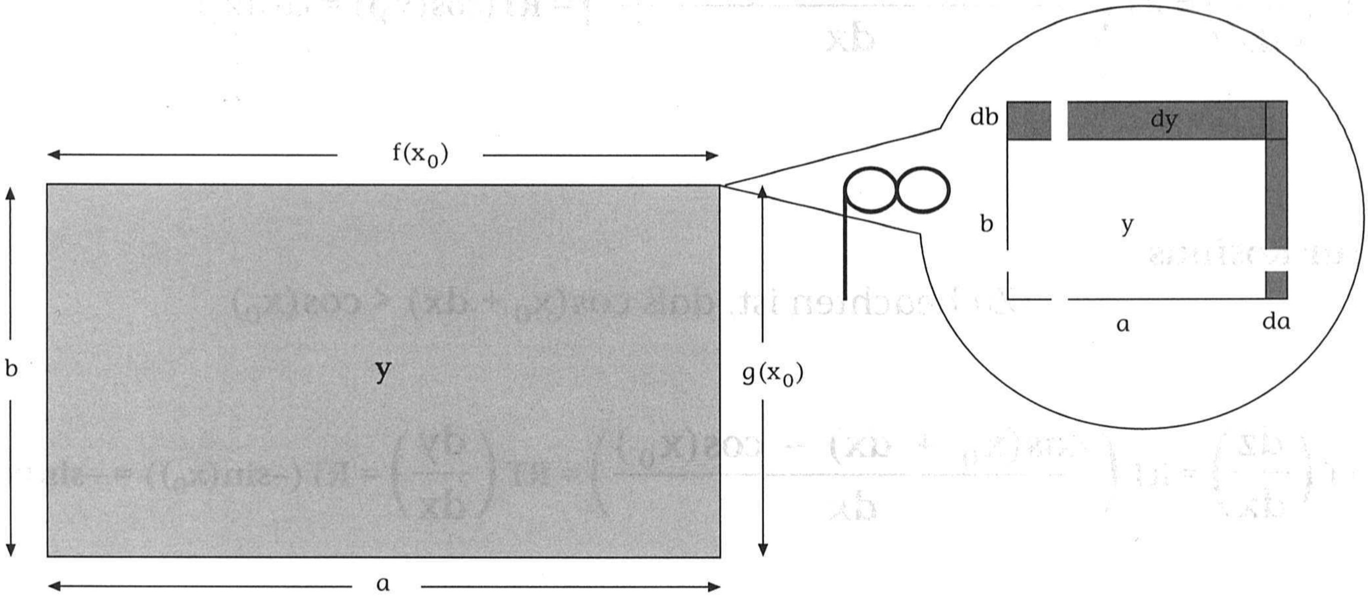


Abb. 1

Das Produkt p zweier Funktionen f und g (mit den entsprechenden Gleichungen), also $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ läßt sich an einer Stelle x_0 geometrisch als Rechteck veranschaulichen (vgl. Abb. 1).
Zur Abkürzung soll $y = f(x_0) \cdot g(x_0)$, $a = f(x_0)$ und $b = g(x_0)$ gelten. Da f und g differenzierbare Funktionen sind, liefert jedes Differential dx auch Differentiale da und db. Dies finden wir in der Abbildung wieder.
Diese zeigt das Rechteck in infiniter Vergrößerung. Da es nun aber nicht mehr vollständig gezeichnet werden kann, wird nur seine rechte obere Ecke dargestellt. Um trotzdem den vollen Überblick zu behalten – denn a und b wären in diesem Maßstab unendlich lang zu zeichnen –, enthält die Zeichnung Auslassungen. Da f und g differenzierbar sind, erhalten wir für jedes Differential dx auch Differentiale da und db. Dann ist
$y = ab$ und $y + dy = (a + da)(b + db)$,
woraus sich
$dy = a \cdot db + b \cdot da + da \cdot db$
ergibt. Diese drei Summanden entsprechen den drei Teilen in der Zeichnung, um die die Fläche $a \cdot b$ größer wird, wenn wir x um dx vergrößern. Für den Differentialquotienten mit $dx \neq 0$ ergibt sich dann

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{db}{dx} + b\,\frac{da}{dx} + da\,\frac{db}{dx},$$

wovon der reelle Teil zu bilden ist. Wir erhalten
$y' = ab' + ba' + 0 \cdot b'$.
Es gilt also der

Satz 11 (Produktregel)

Für das Produkt zweier Funktionen $f \cdot g$ mit $f: x \to f(x)$ und $g: x \to g(x)$ gilt $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

zu M 6.1 Lösungen

Infinite Vergrößerung

$$\Downarrow$$

$$dy = a \cdot db + b \cdot da + da \cdot db$$

Division durch $dx \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{db}{dx} + b\frac{da}{dx} + da\frac{db}{dx}$$

Bilden des reellen Teiles

$$\Downarrow$$

$$y' = ab' + ba' + 0 \cdot b'$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) \cdot f'(x) \cdot g(x)}$$

M 6.2 Kettenregel

Unter der Verkettung zweier Funktionen versteht man ihre Nacheinanderausführung. Auf die Variable x wendet man zunächst die Funktion h an und erhält $h(x)$. Auf dieses Ergebnis wendet man nun g an und es ergibt sich $g(h(x))$. Die Kurzschreibweise ist
$h: D_h \rightarrow W_h$
und
$g: D_g \rightarrow W_g$, mit $D_h \supseteq W_g$

und somit

$f: D_h \rightarrow W_g, x \rightarrow f(x), f(x) = g(h(x))$.
Es sei nun $dx \neq 0$ eine beliebige Infinitesimalzahl. Wir schreiben zur Vereinfachung
$z = h(x), dz = h(x + dx) - h(x)$
sowie
$y = f(x), dy = f(x + dx) - f(x) = g(h(x + dx)) - g(h(x))$
$= g(z + dz) - g(z)$.

Wir bilden den reellen Teil der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$,

welchen wir mit dz erweitern können, sofern $dz \neq 0$. Es ergibt sich
$RT(\frac{dy}{dx}) = RT(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}) = RT(\frac{dy}{dz}) \cdot RT(\frac{dz}{dx}) = g'(z) \cdot h'(x)$
$= g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Falls $dz = 0$ gilt, so folgt sofort $h(x + dx) = h(x)$ und damit $dy = 0$. Formal gilt also mit $h'(x) = RT(\frac{dz}{dx}) = 0$ auch $f'(x) = RT(\frac{dy}{dx}) = 0$.

Sind zwei Funktionen also miteinander verkettet, so bildet man ihre 1. Ableitung, indem man die Ableitungen der einzelnen Funktionen miteinander multipliziert. Es gilt der

Satz 12 (Kettenregel)

Die Ableitung der Verkettungsfunktion f der Funktionen h und g mit $f(x) = g(h(x))$ lautet $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Aufgaben

Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:
a) *f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$*

b) *g mit $g(x) = \sqrt{\sin(x)}$, für $0 < x < \pi$.*

7 FLÄCHENINHALTSBERECHNUNGEN

Die Quadratur eines krummlinig begrenzten Ebenenstücks, d. h. die Angabe eines Quadrats mit demselben Flächeninhalt wie das vorgelegte Ebenenstück, gehört zu den ältesten mathematischen Problemen. Dem damit erfolgenden Einstieg in die Integralrechnung dient ein Problem, mit dem sich bereits Archimedes beschäftigt hat: die Flächeninhaltsberechnung eines beliebigen Parabelsegments.
In einem ersten Schritt bediente sich Archimedes einer Methode, die seinen Ansprüchen als Mathematiker zwar nicht genügte, die aber zu dem Ergebnis führte, daß der Flächeninhalt eines Parabelsegments 4/3 desjenigen eines Dreiecks ABC mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe ist. Seinem zweiten, absichernden Schritt, der der heutigen Epsilontik entspricht, wird hier nicht gefolgt. Statt dessen wird das Problem mit den Methoden der Infinitesimalmathematik gelöst.

M 7.1 Flächeninhalt eines Parabelsegments

Problemstellung

Archimedes hat in einem Gedankenexperiment mit Hilfe des Hebelgesetzes den Flächeninhalt der Parabel mit $f(x) = kx^2$, $k > 0$ ermittelt (vgl. Abb. 1).
Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $f(x) = kx^2$, $k > 0$. Weiterhin seien folgende Punkte mit ihren Koordinaten ($a > 0$) gegeben: $A(-a; ka^2)$, $B(0; 0)$, $C(a; ka^2)$, $D(0; ka^2)$, $X(x_0; ka^2)$, $Y(x_0; kx_0^2)$.
1) Gesucht ist zunächst die Gleichung der Tangente im Punkt A sowie die Koordinaten der Punkte E, Z und F.
2) Danach ist zu zeigen, daß DB = BE gilt.
3) Schließlich ist zu zeigen, daß für folgende vier Streckenlängen $\frac{XY}{XZ} = \frac{XC}{AC}$ gilt.

Problemlösung

1) Die allgemeine Gleichung einer Tangente lautet $t(x) = mx + b$. Die Ableitung der Parabel hat an der Stelle $-a$ den Wert $f'(-a) = -2ka$, d.h die Steigung beträgt $m = -2ka$. An der Stelle $-a$ müssen die Funktionswerte von t und f übereinstimmen:
$f(-a) = t(-a)$
$ka^2 = -2ka(-a) + b$
$ka^2 = 2ka^2 + b$.
Das ergibt $-ka^2 = b$, so daß man die Tangentengleichung $t(x) = -2kax - ka^2$ erhält.
Damit lassen sich die Koordinaten der Punkte E, Z und F berechnen.
Es ergeben sich $E(0; -ka^2)$ als Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse sowie $Z(x_0; -2kax_0 - ka^2)$ und $F(a; -3ka^2)$ als weitere Punkte der Tangente mit den x-Koordinaten x_0 bzw. a.
2) Dies ist offensichtlich, wenn man die Koordinaten der betreffenden Punkte betrachtet.
3) Der Quotient auf der linken Seite betrifft Strecken, die in y-Richtung orientiert sind. Ihre Längen ergeben sich also aus den Beträgen ihrer y-Koordinatendifferenzen. Durch Umformungen erhält man Koordinatendifferenzen, die zu den in x-Richtung orientierten Strecken auf der rechten Seite der Gleichung gehören.
Es ergibt sich

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{|ka^2 - kx_0^2|}{|ka^2 - (-2kax_0 - ka^2)|}$$

$$= \frac{k \cdot |a^2 - x_0^2|}{k \cdot |2a^2 + 2ax_0|}$$

$$= \frac{|a - x_0|\,|a + x_0|}{2a\,|a + x_0|}$$

$$= \frac{|a - x_0|}{2a}$$

$$= \frac{XC}{AC}$$

und damit die Behauptung.

Folgerung aus diesen Erkenntnissen

Die Figur A XH CM ist eine Strahlensatzfigur mit dem Scheitelpunkt A. Für sie gilt $\frac{XC}{AC} = \frac{HM}{AM}$, woraus sich zusammen mit der soeben gezeigten Gleichheit $\frac{XY}{XZ} = \frac{HM}{AM}$ ergibt.
Da G in der Verlängerung von AM gleich weit von M entfernt sein soll wie A, heißt das auch $\frac{XY}{XZ} = \frac{HM}{GM}$ bzw. $XY \cdot GM = XZ \cdot HM$.
Dies ist das Hebelgesetz mit M als Drehpunkt des Hebels, wenn wir uns in G die Strecke X'Y' angebracht denken, die kongruent ist zu XY. Dies gilt für jede Strecke XY des Parabelsegments, sie ist also in G (Hebellänge GM) mit der entsprechenden Strecke XZ (Hebellänge HM) des Tangentendreiecks im Gleichgewicht. Damit kann man auch das ganze Parabelsegment mit seinem Schwerpunkt im Punkt G „befestigen", es hält dann dem Dreieck, „befestigt" im Schwerpunkt S, die Waage.
Der Schwerpunkt S des Dreiecks ACF aber hat die Entfernung $\frac{1}{3}$ MG vom Drehpunkt M, denn die Seitenhalbierenden teilen sich gegenseitig immer im Verhältnis 2:1. Also muß das Dreieck ACF dreimal so groß sein wie das Parabelsegment. Das ist die mathematische Präzisierung des physikalischen Gleichgewichtsexperiments.
Der genaue Wert für den Flächeninhalt des Parabelsegments ergibt sich so aus dem des Dreiecks ACF. Dieser beträgt $\frac{1}{2} AC \cdot CF = \frac{1}{2} 2a \cdot 4ka^2 = 4ka^3$, also ist der Flächeninhalt des Parabelsegments $\frac{1}{3} 4ka^3 = \frac{4}{3} ka^3$.
Dieses Ergebnis erhält man auch noch auf andere Weise. Das Dreieck ABC schöpft das Parabelsegment teilweise aus. Weiterhin besitzt das Dreieck AEC den doppelt so großen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC. Das mit dem Parabelsegment im Gleichgewicht befindliche Dreieck ACF ist wiederum doppelt so groß wie das Dreieck ACE, also viermal so groß wie das Dreieck ABC. Der Flächeninhalt von Dreieck ABC beträgt

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot ka^2 = ka^3.$$

Faßt man dies alles zusammen und berücksichtigt man die kürzere Hebellänge beim Dreieck ACF, so ergibt sich als Flächeninhalt des Parabelsegments $\frac{4}{3}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC, also ebenfalls $\frac{4}{3} ka^3$.

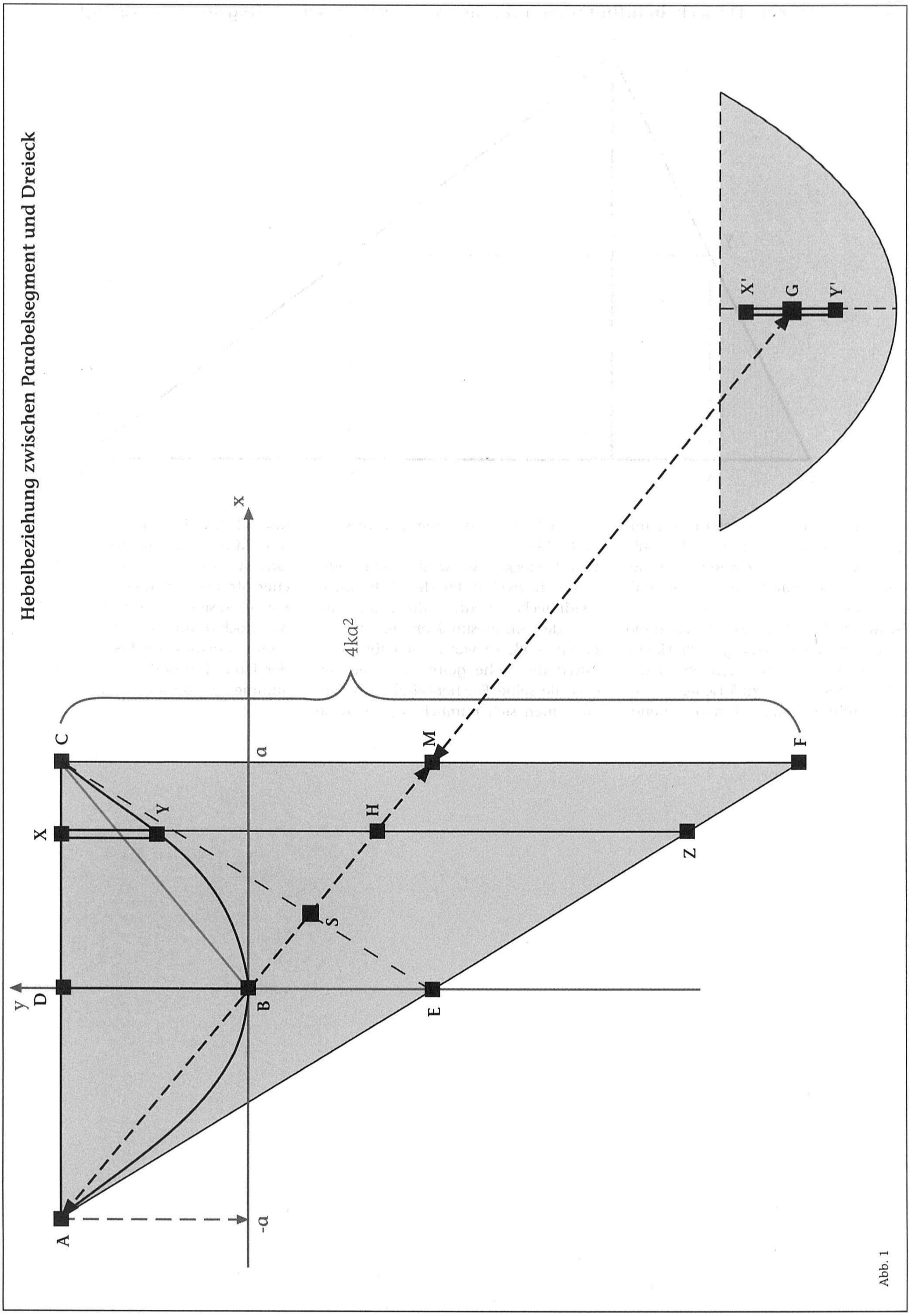

Hebelbeziehung zwischen Parabelsegment und Dreieck
x
y
4ka²
a
-a
A
B
C
D
E
F
H
M
S
X
Y
Z
X'
G
Y'

Abb. 1

Nichtsymetrisches Dreieck, in infinitesimale Streifen senkrecht zu seiner längsten Seite zerlegt

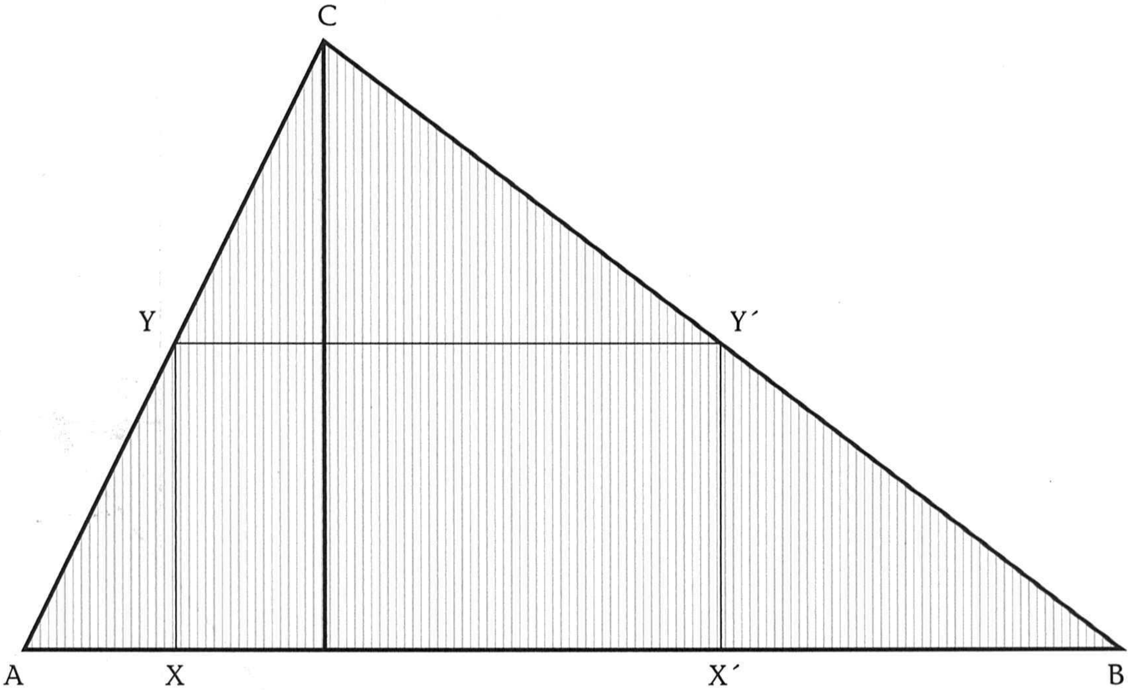


Abb. 2

Die Zerlegung einer Fläche in unendlich viele Strecken, die infinitesimale Breite besitzen, ist der wesentliche Gedanke bei der Einführung der Integralrechnung.

Hinweis: Die folgende Überlegung zeigt, daß die Zerlegung einer Fläche in unendlich viele Strecken mit unendlich schmaler Dicke zu falschen Ergebnissen führen kann, falls man „unendlich viel" zu undifferenziert versteht (vgl. Abb. 2).

Das Dreieck ABC wird durch seine Höhe in zwei unterschiedlich große Teildreiecke zerlegt. Ist die infinite Anzahl der infinitesimal breiten Streifen gleich groß, so würde sich für beide durch die Höhe getrennten Teildreiecke derselbe Flächeninhalt ergeben. Sie bauen sich nämlich aus genauso unendlich vielen Strecken XY bzw. X'Y' auf. Man muß zusätzlich beachten, daß im größeren Teildreieck bei gleicher Streifenzahl diese breiter als im kleineren sein müssen, wenn auch immer noch infinitesimal breit.

Wenn man dies aber beachtet, dann ist der Dreiecksinhalt der reelle Teil der Summe aller dieser Streifeninhalte.

M 7.2

Integration der Funktion f: $x \to x^2$ über dem Intervall [0; 1]

Das Intervall [0; 1] wird in Ω (Ω ist eine infinite hypernatürliche Zahl) Streifen der Breite $\frac{1}{\Omega}$ eingeteilt ($\omega := \frac{1}{\Omega}$). An jeder Stelle $\frac{j}{\Omega}$ ($j = 1; 2; 3; \ldots; \Omega$) hat die Funktion den Wert $\left(\frac{j}{\Omega}\right)^2$ oder $(j \cdot \omega)^2$.

Infinitesimale Streifen unterhalb der Parabel

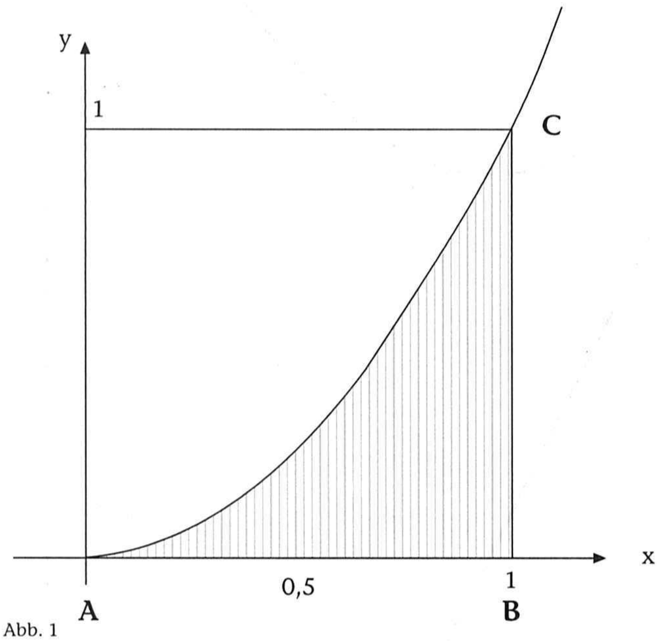


Abb. 1

Die Fläche, die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird, wird durch Ω Rechtecke der infinitesimalen Breite ω und der Höhe $j^2 \cdot \omega^2$ approximiert. Der Flächeninhalt A(f) ergibt sich also als der reelle Teil der Summe

$$S = \sum_{j=1}^{\Omega} \omega \cdot j^2 \cdot \omega^2 = \omega^3 \sum_{j=1}^{\Omega} j^2 = \omega^3 \frac{\Omega(\Omega + 1)(2\Omega + 1)}{6}$$

$$= \frac{(1 + \omega)(2 + \omega)}{6},$$

also $A(f) = RT(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Hinweis:
Mit DERIVE kann man, ohne von der Summe von Quadratzahlen zu wissen, das Ergebnis direkt erhalten (geschrieben mit infinitesimalem dx statt ω):
Simplify von RT(SUM(dx · j²dx², j, 1, 1/dx), dx) ergibt 1/3.
Der Flächeninhalt unter der Normalparabel im Intervall [0; 1] beträgt also ein Drittel des Einheitsquadrates. Das bestätigt Archimedes' Ergebnis, denn die rechte Hälfte des in M 7.1 betrachteten Parabelsegments besitzt als Flächeninhalt die anderen zwei Drittel des Einheitsquadrates.

Aufgaben

Übertragen Sie die Überlegungen auf die Funktion f mit
f: $x \to kx^2$, ($k > 0$)
***1)** im Intervall [0; b]*
***2)** im Intervall [a; b].*

zu M 7.2 Lösungen

zu 1)
Wegen $\Omega \cdot dx = b$ setzt man $dx := \frac{b}{\Omega} = b \cdot \omega$. Es gilt

$$A(f) = RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} k(jdx)^2 dx\right) = RT\left(k(dx)^3 \sum_{j=1}^{\Omega} j^2\right) =$$

$$RT\left(kb^3\omega^3 \frac{\Omega(\Omega + 1)(2\Omega + 1)}{6}\right)$$

$$A(f) = k\,\frac{b^3}{3}.$$

zu 2)
Das Intervall [a; b] wird in Ω Teilintervalle der infinitesimalen Länge dx eingeteilt. Wegen $\Omega \cdot dx = b - a$ setzt man

$dx := \frac{b - a}{\Omega} = (b - a) \cdot \omega$. Die Funktionswerte werden an den Unterteilungsstellen $x_j = a + jdx$ berechnet.
Es gilt

$$A(f) = RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} k(a + jdx)^2 dx\right)$$

$$= k \cdot RT\left(a^2dx \sum_{j=1}^{\Omega} 1 + 2a \cdot (dx)^2 \sum_{j=1}^{\Omega} j + (dx)^3 \sum_{j=1}^{\Omega} j^2\right)$$

$$= k \cdot RT\left(a^2dx \cdot \Omega + 2a(b-a)^2\omega^2 \cdot \frac{\Omega(\cdot\Omega + 1)}{2} + (b-a)^3\omega^3 \frac{\Omega(\Omega + 1)(2\Omega + 1)}{6}\right)$$

$$= k\left(a^2(b-a) + a(b-a)^2 + (b-a)^3\frac{1}{3}\right) = \frac{k}{3}(b^3 - a^3)$$

Hinweis: Der Vergleich der Lösungen führt direkt zum Umgang mit Stammfunktionen!

Leibnizsche Schreibweise

Für $f(x) = kx^2$:

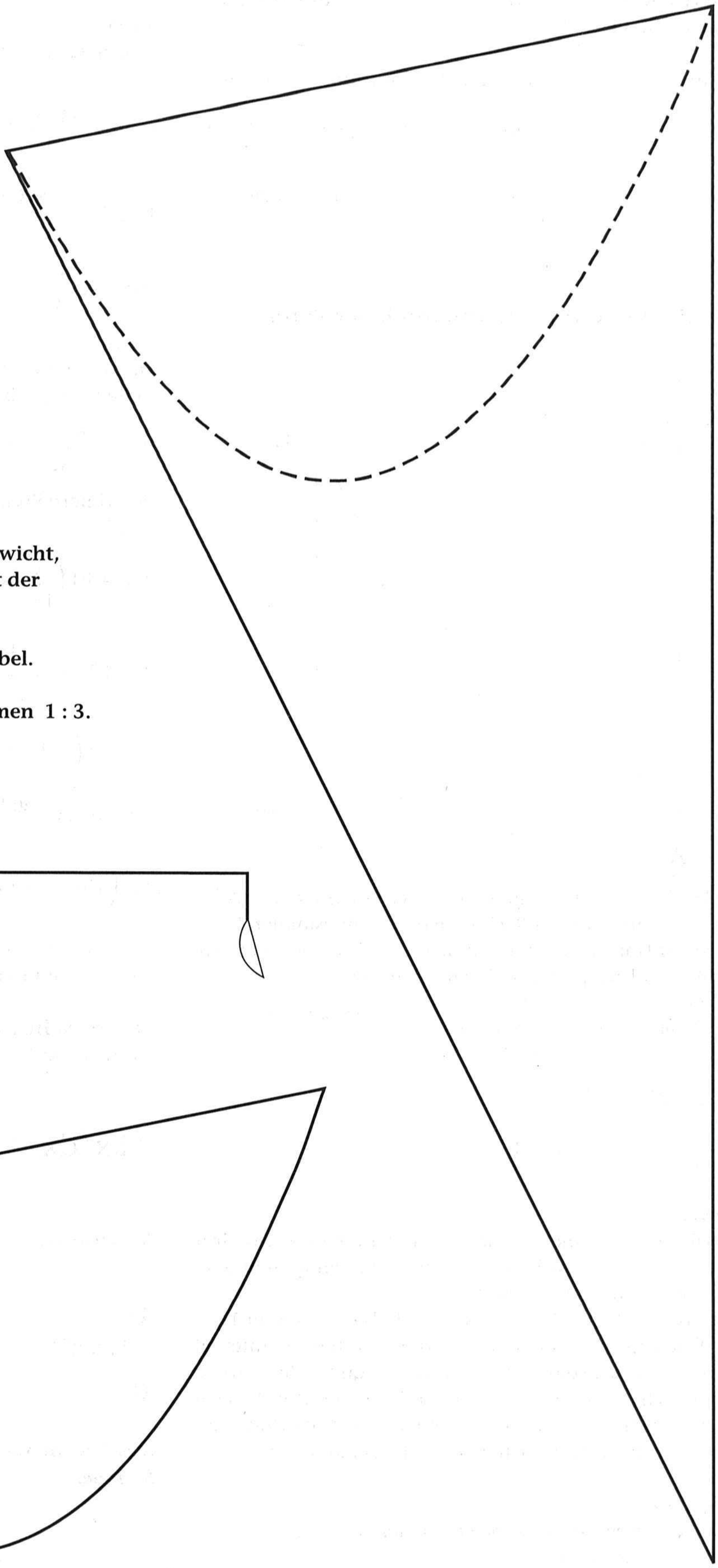
$$\int_a^b kx^2dx := RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} kx_j^2\, dx\right)$$

Allgemein für f(x):

$$\int_a^b f(x)dx := RT\left(\sum_{j=1}^{\Omega} f(x_j)\, dx\right)$$

Das bestimmte Integral ist der reelle Teil einer infiniten Summe.

Ausschneidebogen zum Experiment von Archimedes



Man kopiere die Vorlage eventuell vergrößert.

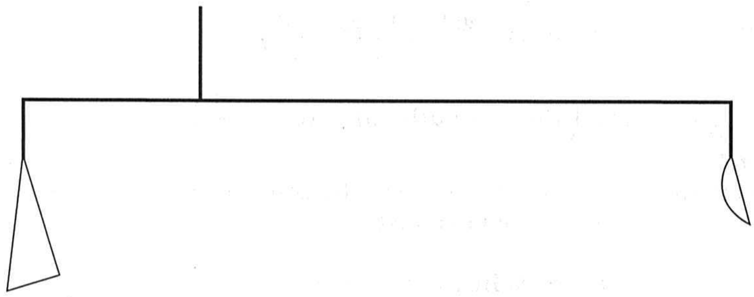
Man klebe die Kopie auf Pappe.

Man schneide Dreieck und Parabelsegment aus.

Die erhaltenen Körper haben ein Gewicht, das proportional zum Flächeninhalt der beiden Figuren ist.

Man hänge die Figuren an einen Hebel.

Er ist im Gleichgewicht bei Hebelarmen 1 : 3.



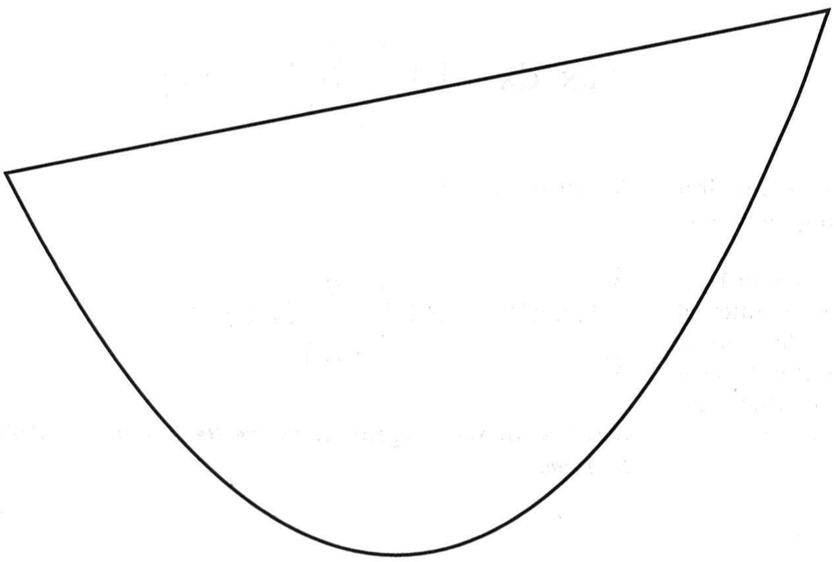


Abb. 2

Thema der nächsten Ausgabe

Kegelschnitte – mit Geometrie-Software

Ausgabe 5/1996

Literatur

Weiterführende Aufsätze

1. **P. Baumann, B. Steinig, H. Wunderling: Differentialrechnung mit hyperreellen Zahlen.**
PM 37 (1995) Heft 2 und Heft 3
2. **R. Sietmann: Von Leibniz zu Robinson – Eine Alternative zur klassischen Analysis.**
MNU 37 (1983) Heft 4
3. **H. Neuheuser: Die Infinitesimalmathematik – Eine transparente Alternative zur heutigen Schulanalysis.**
MNU 40 (1987) Heft 2
4. **H. Wunderling: Integration nach Archimedes, Leibniz und Robinson.**
MNU 49 (1996) Heft 2
5. **D. Laugwitz, W. Schnitzspan, D. Spalt, F. Wattenberg: Nichtstandard-Analysis.**
MU 29 (1983) Heft 4
6. **P. Baumann, Th. Kirski, D. Laugwitz, B. Steinig, C. Utecht, H. Wunderling: Infinitesimalmathematik**
MU 43 (1997)

In diesen Artikeln findet der Leser eine weit gefächerte Auseinandersetzung mit dem Thema „Analysis mit hyperreellen Zahlen".

Empfehlenswerte Bücher:

1. **J. M. Henle, E. M. Kleinberg: Infinitesimal Calculus.**
Cambridge and London: The MIT Press 1979
Das Buch gibt eine gute Gesamtdarstellung der für die Schule relevanten Infinitesimalanalysis. Es nutzt die Dezimaldarstellung für hyperreelle Zahlen. (In Englisch)

2. **C. H. Edwards, Jr.: The Historical Development of the Calculus.**
Springer-Verlag 1979
Das Buch gibt einen guten Einblick in die Entwicklung der Ideen zur Infinitesimalmathematik von den Anfängen bis heute. (In Englisch)

Für Sie notiert

Cornelsen Förderpreis 1997 Mathematik

Die gemeinnützige Franz und Ruth Cornelsen Stiftung, Berlin, verleiht 1997 den mit insgesamt 10.000 DM dotierten Cornelsen Förderpreis erstmals für das Fach Mathematik und unterstützt damit die Arbeit von Lehrerinnen und Lehrern, die ihren Schülern mit selbstentwickelten Unterrichtseinheiten die eigene Lebenswelt näher bringen. Weitere Verleihungen im Fach Mathematik sind alle drei Jahre vorgesehen. Der Cornelsen Förderpreis wird bereits seit 1991 jährlich verliehen, zunächst für die Fächer Biologie und Chemie, nun aber auch für die Mathematik.

Gesucht und prämiert werden bislang unveröffentlichte Arbeiten, die in Zusammenarbeit mit Schülerinnen und Schülern entwickelt und erprobt wurden. Die Arbeiten können sich auf den Mathematikunterricht in allgemeinbildenden Schulen (ab Klasse 5) und berufsbildenden Schulen beziehen. Die Auswahl der drei Preisträger übernimmt eine wissenschaftliche Fachjury.

In Text und Bild dokumentierte Arbeiten können zusammen mit einer Kurzfassung von drei Seiten (Fragestellung, Methoden, Ergebnisse) bis 31.12.1996 bei Prof. Dr. Thomas Jahnke, Lehrstuhl für Didaktik und Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Potsdam, Postfach 60 15 53, 14415 Potsdam eingereicht werden.