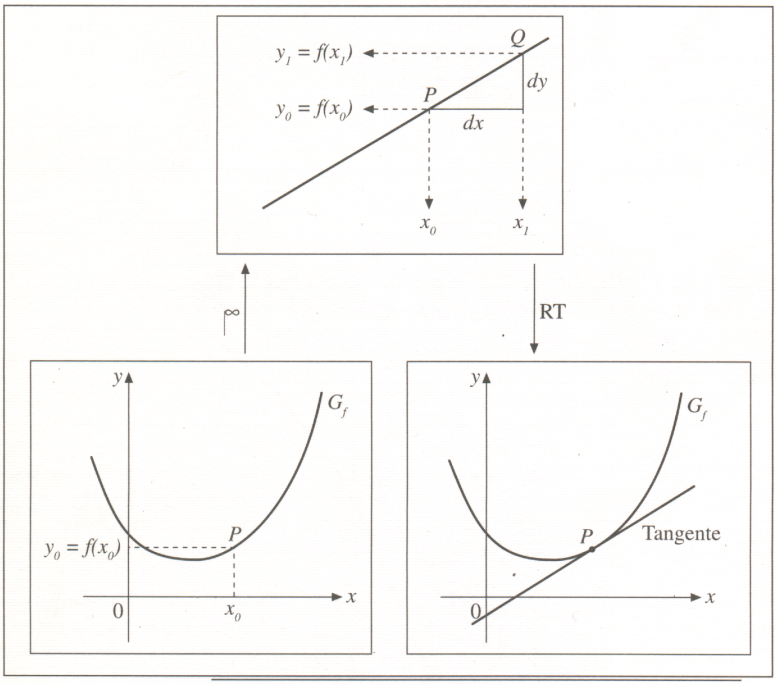
MU

DER MATHEMATIK-UNTERRICHT



Infinitesimalmathematik

Jahrgang 43 · Heft 1 · Januar 1997

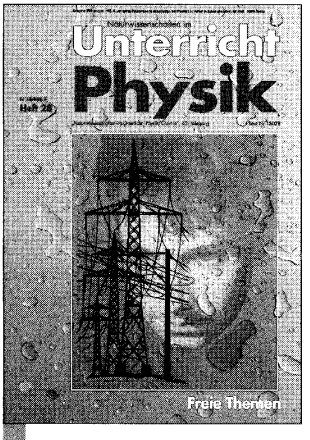
H 6593

Anzeige

Unterricht Physik

Die Zeitschrift enthält unterrichtspraktische Hilfen für den zeitgemäßen Physikunterricht überwiegend für die Sekundarstufe I. Mit vielen Materialien trägt sie dazu bei, Schülern den Zugang zu Phänomenen der Physik zu vereinfachen.

Unterricht Physik will Lehrerinnen und Lehrern helfen, mit einfachen Versuchen und geringem apparativen Aufwand Schülern physikalische Fragestellungen näherzubringen.



UNTERRICHT PHYSIK
erscheint 6x jährlich, Jahresabonnementpreis inkl. Jahresheft und SCHÜLER, DM 103,00 zzgl. Versandkosten.

Für die Bestellung eines kostenlosen Probeabonnements nutzen Sie bitte die Bestellkarte im Beihefter.

FRIEDRICH VERLAG
Vertrieb, Postfach 10 01 50,
30917 Seelze

Anzeige

GESCHICHTE LERNEN

Die Zeitschrift für den Geschichtsunterricht heute

Geschichtsunterricht soll lebendig, schülernah, aktuell und anspruchsvoll sein.
Geschichte lernen, die Zeitschrift für den Geschichtsunterricht heute, unterstützt Sie ideenreich bei der Planung und Durchführung Ihres Unterrichts und hilft Ihnen, Qualität und Effizienz zu vereinen.
Heft für Heft bereiten wir ein Schwerpunktthema für Sie auf. Die Palette reicht von klassischen Lehrplaninhalten, die wir für Sie vertiefen, bis zu neuen und ungewohnten Themen, die wir für Sie erschließen. Damit geben wir Ihnen die Sicherheit, die Sie für Ihren Unterricht brauchen – und machen Mut zu Innovationen.

GESCHICHTE LERNEN *erscheint 6 x jährlich, Jahresabonnementpreis inkl. Jahresheft und Friedrich-Reihe: SCHÜLER DM 99,40 zzgl. Versandkosten*

Möchten Sie **Geschichte lernen** kennenlernen? Fordern Sie Ihr persönliches kostenloses Probeabonnement an. Eine Bestellkarte finden Sie in diesem Heft!

FRIEDRICH VERLAG
Vertrieb, Postfach 10 01 50,
30917 Seelze

Jahrgang 43 · Heft 1/1997

MU

Der Mathematikunterricht

Beiträge zu seiner fachinhaltlichen und fachdidaktischen Gestaltung

Infinitesimalmathematik

Verantwortlich für den Thementeil in diesem Heft:
Helmut Wunderling

Zur Einführung
von Helmut Wunderling
Seite 3

Zur historischen Entwicklung der Infinitesimalmathematik
von Detlef Laugwitz
Seite 5

Einführung der Integralrechnung über die Infinitesimalanalysis – Ein Erfahrungsbericht
von Cordula Utecht
Seite 24

Einführung der Analysis über hyperreelle Zahlen – Ein Erfahrungsbericht
von Peter Baumann
Seite 33

Unendliche Reihen
von Thomas Kirski
Seite 47

Über den Gebrauch infiniter Vergrößerungen in der Analysis
von Helmut Wunderling
Seite 55

Schüler finden Differenziationsregeln selbst
von Helmut Wunderling
Seite 62

Bemerkungen über die Mächtigkeit verschiedener (interner) Teilmengen von $\mathbb{H}$
von Bernhard Steinig
Seite 69

Register des Jahrgangs 1996
Seite 71

Der Mathematikunterricht wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Martin Glatfeld (V. i. S. d. P.), Günter Schmidt und Günter Steinberg.
Herstellung: Pädagogika Zentrale, Velber
Verkaufs- und Anzeigenleitung: Bernd Schrader – Anzeigenabwicklung: Tel. (05 11) 4 00 04-22
Anzeigenpreisliste Nr. 16 vom 1. 10. 1995
Vertrieb und Abonnement: Tel. (05 11) 4 00 04-53
Verlagsanschrift: Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, Postfach 100 150, 30917 Seelze, Tel. (05 11) 4 00 04-0, Telex: 9-22 923
Redaktionssekretariat: Birgit Kleinert, Tel. (05 11) 4 00 04-12

„Der Mathematikunterricht" erscheint zweimonatlich. Das Jahresabonnement für die Zeitschrift „Der Mathematikunterricht" besteht aus sechs Einzelheften, einem Jahresheft und ab 1995 einem Heft der neuen Friedrich Reihe: Schüler. Der Einzelheftbezugspreis im Abonnement beträgt DM 17,50, Jahresheft aller pädagogischen Zeitschriften des Friedrich Verlages DM 19,80 und die Reihe Schüler DM 14,80 (Abonnement mit Jahresheft Inland DM 139,60; Ausland DM 148,00; im voraus zahlbar). Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen zum Ende des Kalenderjahres gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
Der Mathematikunterricht ist zu beziehen durch alle Buchhandlungen oder direkt vom Verlag. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.
© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Material bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden.
Bei Nichtlieferung infolge höherer Gewalt oder infolge Störungen des Arbeitsfriedens bestehen keine Ansprüche gegen den Verlag.
Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
ISSN-Nr. 0025-5807
Best.-Nr. 24073
Herstellung: Pädagogika Zentrale, Velber; Druck: Ludwig Auer GmbH, Donauwörth

Mitherausgeber:
Univ.-Professor Dr. Martin Glatfeld
Hainteichstraße 17
33613 Bielefeld

StD Günter Schmidt
Am Hahn 3
55442 Stromberg

StD Prof. Günter Steinberg
Mutzenbecherstraße 3
26131 Oldenburg

Schriftleiter kleingedrucktes:
Gerhard König
Lauenburger Straße 45
76139 Karlsruhe

Verantwortlich für den Thementeil in diesem Heft:
StD Helmut Wunderling
Daimlerweg 84
14167 Berlin

Beiträge von:
StR Peter Baumann
Goethestr. 22
12207 Berlin

Dr. Thomas Kirski
Baumertweg 14
13595 Berlin

Prof. Dr. Detlef Laugwitz
Ahornweg 23
64367 Mühltal

Dr. Bernhard Steinig
Schubartstr. 45
13509 Berlin

Cordula Utecht
Rheinstr, 2
53179 Bonn

StD Helmut Wunderling
Daimlerweg 84
14167 Berlin

Zur Einführung

Meine Wertschätzung der Infinitesimalmathematik stammt aus meiner eigenen Schulzeit: als Schüler habe ich naive „Infinitesimalrechnung" von einem Physiker als Mathematiklehrer gelernt. Im Studium wurde ich von der exakten Wissenschaft enttäuscht; die Leibnizsche Infinitesimalrechnung bleibt ungeklärt und wurde nur durch die im 19. Jahrhundert reformierte Analysis ersetzt.

Hinzu trat die Erfahrung als Lehrer, der seinen Schülern das Exakteste bieten wollte, was zu bekommen war, in jenen sechziger Jahren der „Modernen Mathematik" in der Schule. Und dann musste ich erleben, wie ein sehr beträchtlicher Anteil meiner Schüler einfach erschreckt war durch das ε-δ-Gespenst! Aber die Schüler waren besser als ich, sie hatten keine Skrupel, ließen *Grenzübergang* als reine Vokabel bestehen, aber befreiten sich letztlich heimlich und listig zugleich einfach von denjenigen Anteilen eines Ausdrucks, die sie nicht brauchten. Und das tun sie auch anders wo und anders wann, wie ich aus zahlreichen Unterrichtsbesuchen weiß.

Die Wende für mich kam, als 1983 das MU-Heft 4 über „Nichtstandard-Analysis" und vor allem als 1986 das exzellente Buch „Zahlen und Kontinuum. Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik" von D. Laugwitz erschien. Zunächst experimentierte ich in Leistungskursen, wo ich ziemlich schnell den didaktischen Gewinn erkannte, von dem dort die Rede war. Heute gibt es weitere Kollegen, die Erfahrungen gesammelt haben, und zwar von Klasse 11 an bis in die Grund- und Leistungskurse hinein. Die Erfahrungen aller Lehrer, die den Versuch gewagt haben, stützen die von Schnitzspan [MU 4/83 S. 39] formulierte These:

„Infinitesimalmathematik in der Schule kann die Begriffe der klassischen Analysis durchschaubarer und verstehbarer machen."

Dabei ist wohl das Entscheidende, dass das einfachere Verstehen mehr Schüler dazu befähigt, in einem viel größeren Umfange *selbstständig* zu den grundlegenden Sätzen der Differenzial- und Integralrechnung zu gelangen, als es der herkömmliche Unterricht mit Grenzwerten zulässt.

Zu Beginn dieses Heftes gibt *D. Laugwitz* in seinem Beitrag einen Einblick in die Entstehungsgeschichte der Infinitesimalmathematik seit Leibniz. Er richtet dabei sein Augenmerk auf die Bemühungen der Mathematik um die Klärung der fruchtbaren Ideen, die zu den Grundlagen des Infinitesimalkalküls geführt haben. Er findet diese Klärung im Ansatz bei Cauchy, der im Laufe seiner eigenen Entwicklung schließlich zu einem konstruktiven Konzept für unendlich kleine Zahlen kommt. Er zeigt, dass dieser Ansatz bis zum heutigen Verständnis der hyperrellen Zahlen im Sinne von Robinson entwickelt werden kann. Dabei wird deutlich, dass der Motor für all diese über die Jahrhunderte andauernden Anstrengungen in der Erfahrung liegt, dass die Hilfsmittel des Infinitesimalen besonders leicht zu grundlegenden Erkenntnissen führen, dass damit eine Methode zum Problemlösen gefunden ist, und schließlich, dass sich das Infinitesimale logisch einwandfrei fundieren lassen muss, weil so viel Erfolg schwerlich dem Zufall zuzuschreiben ist.

C. Utecht referiert aus einer Arbeit für das 2. Staatsexamen. Sie hat untersucht, wie Schüler eines Grundkurses mit dem Konzept der hyperreellen Zahlen umgehen, wenn ihnen nach traditionellem Unterricht im Differenzieren ein anderer Zugang zum Integral angeboten wird. Dabei stellt sich heraus, dass Schüler einerseits durch die Begriffe infinitesimaler und infiniter Zahlen hoch motiviert werden und rasch zu eigenem Argumentieren kommen, dass sie aber andererseits eine rein axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen nicht befriedigt. Darüber hinaus wird deutlich, dass das Denken in

Grenzprozessen den Zugang zur Infinitesimalanalysis teilweise behindert; und zwar gerade nur bei guten Schülern, die Grenzprozesse verinnerlicht hat. (Im Übrigen gilt das auch für die Unterrichtenden!)

P. Baumann berichtet aus seinem Unterricht, der sich von Beginn an auf die hyperrellen Zahlen stützt. Er beschreibt deshalb vor allem die Einführung von hyperreellen Zahlen. Dazu ist nur eine gewisse Sichtänderung im Lehrabschnitt über Folgen nötig, den der Lehrplan ja fordert. Er orientiert sich bei der Frage, wieweit die Theorie der hyperreellen Zahlen mit Schülern zu treiben ist pragmatisch an einem mittleren Niveau, welches gestattet, dass sowohl die neuen Zahlen in Schüleraugen konkret erscheinen als auch dass Einsichten über die Art ihres Gebrauchs entstehen. Diese Konkretisierung durch reelle Zahlenfolgen ist bereits von W. Schnitzspan in MU 4/83 beschrieben und unterdessen so häufig erfolgreich erprobt worden, dass man sie uneingeschränkt empfehlen kann. Der Beitrag schließt mit je einem kurzen Blick auf das Differenzieren und das Integrieren.

Th. Kirski stellt am attraktiven Thema der unendlichen Reihen vor, wie eine Behandlung mittels hyperreeller Zahlen in der Schule aussehen kann. Er beginnt mit „Achill und der Schildkröte" und stellt dann verschiedene Konvergenzkriterien auf die Eulersche Grundlage. Sodann betrachtet er Reihenentwicklungen von Funktionen und zeigt, wie auch divergente Reihen im Kontext mit hyperreellen Zahlen ihren Nutzen haben. Alles geschieht an Beispielen, die aus dem Unterricht stammen und direkt übernommen werden können.

H. Wunderling stellt zunächst die Vergrößerungstechnik mit infiniten Maßstabsänderungen vor. Sie hat sich als ein hervorragendes Mittel erwiesen, um Begriffsbildungen der Infinitesimalmathematik zu veranschaulichen. Infinite Vergrößerungen spielen dieselbe rein gedankliche Rolle wie sonstige geometrische Bilder zur Stützung von Beweisen. Sie fehlen in der reellen Analysis. Schüleraktivitäten im Bereich der Differentiationsregeln sind ein weiteres Thema. Sie dienen als Beispiel dafür, wie zwanglos Infinitesimalmathematik in den Unterricht eingebunden werden kann, und zeigen, dass ihre Begriffe so eingängig sind, dass Schüler weitgehend selbstständig damit umgehen können.

Schließlich zeigt *B. Steinig*, dass bei der Erweiterung der Menge der reellen Zahlen zu der der hyperreellen die Mächtigkeit sich nicht vergrößert.

Mögen diese Artikel dazu beitragen, dass weitere Kollegen sich ermutigt fühlen, mit infinitesimalen Methoden die Grundlagen für die Analysis zu legen. Schüler, die sich auf diese Weise das Gebiet erschlossen haben, benutzen die hyperreellen Zahlen bei der Lösung von Übungsaufgaben auch in der Universität, obwohl ihnen der Grenzwertbegriff zur Verfügung steht. Sie übersetzen notfalls:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = RT(a) ,$$

wobei a durch (a_n) dargestellt wird und $RT(a)$ der reelle Teil der hyperreellen Zahl a ist.

Helmut Wunderling

Zur historischen Entwicklung der Infinitesimalmathematik

von Detlef Laugwitz

1. Leibniz und L'Hospital

Vor genau 300 Jahren erschien das erste Lehrbuch der Differenzialrechnung, die *Analyse des infiniment petits*, verfasst von Marquis Guillaume F. A. L'Hospital (1661–1704) in Paris auf der Grundlage von Ausarbeitungen Johann Bernoullis (1667–1748). Letzterer gehörte zusammen mit seinem älteren Bruder Jakob (1654–1705) zu den ersten Mitstreitern von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), dem Erfinder des Kalküls. Leibniz publizierte erstmals im Jahre 1684 einige einfache Anwendungen des Differenzialkalküls, ohne dabei saubere Begründungen auch nur zu versuchen. Solche Versuche finden sich in Briefen an kritische Zeitgenossen.

So schreibt Leibniz am 30. März 1690 an John Wallis (1616–1703): „Es ist nützlich, Größen als unendlich klein zu betrachten, so dass sie, wenn ihr Verhältnis gesucht wird, nicht als Null anzusehen, sondern zu vernachlässigen sind, sobald sie neben Größen auftreten, welche unvergleichlich größer sind. Wenn wir $x + dx$ haben, so wird dx vernachlässigt. Aber anders ist es, wenn wir den Unterschied zwischen $x + dx$ und x suchen. In ähnlicher Weise können wir nicht $x\,dx$ und $(dx)^2$ nebeneinander stehen lassen. Wenn wir also xy zu differenzieren haben, dann schreiben wir $(x + dx)(x + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy$. Aber hier ist $dx\,dy$ zu vernachlässigen, weil das unvergleich kleiner ist als $x\,dy + y\,dx$. Mithin ist der Fehler in jedem speziellen Fall kleiner als jede beliebige endliche Größe." (Leibniz, Math. Schriften IV, 63; meine Übersetzung.)

Leibniz geht, wie wir sehen, ganz pragmatisch vor. Er gibt eine Regel an, welche in ‚jedem speziellen Falle' auf ein richtiges Ergebnis führt. Das sieht zunächst nach einer bloßen Erfahrungstatsache aus; auf theoretische Begründungen kommen wir noch. Wir sehen, dass ein Größenbereich, dessen Maßzahlen sicherlich die reellen Zahlen sein sollen, durch ideale Elemente dx, dy, ... erweitert gedacht wird, welche die Eigenschaft haben, dass ein (positives) dx kleiner ist als jede (positive) reelle Größe. Sodann werden die algebraischen Rechenregeln wie üblich angewendet. Wie man an den durchgeführten Beispielen sehen kann, werden am Ende einer Rechnung die Differenziale durch Nullen ersetzt. (In diesem letzten Schritt haben wir der Geschichte etwas vorgegriffen; man merkte nämlich bald, dass die Festsetzung des Vernachlässigens einer Größe gegen eine unvergleichlich Größere nicht immer gut passt. Beispielsweise bekommt man Schwierigkeiten bei $(x + dx)^2 - x^2 = 2x \cdot dx + (dx)^2$ für $x = 0$!)

Das Rezept ist brauchbar bei algebraischen Ausdrücken. Leibniz behandelt schon 1684 die Wurzelregel:

$$d\sqrt{y} = \sqrt{y + dy} - \sqrt{y} = \frac{dy}{\sqrt{y + dy} + \sqrt{y}},$$

und da im letzten Ausdruck dy neben y vernachlässigt werden kann, $d\sqrt{y} = dy/2\sqrt{y}$.

Als Bernoulli und L'Hospital das Buch vorbereiteten, hatte der Kalkül bereits schöne Erfolge in Geometrie und Mechanik erzielt, und zwar auch bei Variationsaufgaben, welche wir nicht mehr zum Anfängerstoff rechnen. Es war eine Methode zum Problem- lösen gefunden, zur Analyse im ursprünglichen Sinne des Wortes. Die spätere Bezeichnung Analysis für die Differenzial- und Integralrechnung leitet sich vom Titel des ersten einschlägigen Buches her. Das Buch selbst versucht im Ansatz eine synthetische Darstellung, d. h. eine solche, die von vorangestellten Prinzipien (Axiomen, Postulaten) ausgeht und deduziert. Was Leibniz in Worte fasste, wird nun als Gleichung $y + dy = y$ postuliert, eine Schreibweise, die bald Anstoß erregte, denn in der Rechnung soll ja zunächst dy nicht gleich Null sein.

Leibniz hatte sich als Philosoph viele Gedanken gemacht über Gleichheits- und Äquivalenzrelationen, aber er setzte das nicht in den Kalkül um. Wir schreiben jetzt $a = b$, wenn wir echte Gleichheit meinen, und benutzen ein anderes Zeichen, etwa $\approx$, für Fast-Gleichheit, also $a \approx b$ wenn $a - b$ unendlich klein ist. Außerdem ist es zweckmäßig, den Zahlbereich der reellen Zahlen, unser $\mathbb{R}$, und den größeren, der auch die unendlich kleinen Zahlen enthält, sorgfältig auseinander zu halten. In unserer Mengenschreibweise, die natürlich ebenso unhistorisch ist wie das Zeichen $\approx$, schreiben wir $^*\mathbb{R}$ und sprechen etwa von hyperreellen Zahlen. Da mag es den echten Historiker grausen – aber wenn wir uns stets darüber im Klaren sind, dass wir unsere moderne reichhaltigere Fachsprache benutzen und diese den historischen Sachverhalt im Einzelfall nicht ganz treu widerspiegelt, dann kann es nicht viel schaden. Das Problem, dass die Sprache der Quellen weniger oder auf andere Weise ausdrucksfähig ist als die heutige Fachsprache, dieses Problem hat jeder Historiker.

In unserer Sprache lässt sich das Rezept von Leibniz und L'Hospital klar formulieren: Man rechne in $^*\mathbb{R}$. Wenn ganz am Ende der Rechnung eine Fast-Gleichung $a \approx b$ erscheint derart, dass a fast gleich einer reellen Zahl ist, so muss auch b fast gleich dieser reellen Zahl sein. (Wer es ganz vornehm haben will, kann von einem Homomorphismus eines Teiles von $^*\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sprechen und diesen Homomorphismus mit st bezeichnen, Bildung des Standard-Teils von a. Der Leser wird leicht verifizieren, dass $st(a + b) = st\, a + st\, b$, $st(a \cdot b) = (st\, a)(st\, b)$, falls alle auftretenden Standard-Teile existieren. Das ist für $1/dx$ nicht der Fall!)

Wir wollen gleich noch etwas weiter modernisieren. Aus dem Brief an Wallis kennen wir Leibniz' Beweis für die Produktregel: Er schreibt eine Gleichung in Differenzialen, und wenn man darin zu Standard-Teilen übergeht, bekommt man $0 = 0$ und ist nicht klüger geworden. Daher wollen wir, wie es bald geschah, lieber Quotienten von Differenzialen verwenden und in der Herleitung x und y als Funktionen von t auffassen, mit

$dx = x(t + dt) - x(t)$ usw.

Dann haben wir

$$\frac{d(xy)}{dt} = \frac{1}{dt}[(x + dx)(y + dy) - xy] = x\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}y + \frac{dx}{dt}dy\,.$$

Die Ableitungsfunktion setzt sich erst ab etwa 1800 durch. Wir verwenden sie sogleich: Wenn bei festem $t = t_0$ alle Differenzial-Quotienten $\frac{dx}{dt}$ den gleichen Standard-Teil haben, unabhängig von der Wahl des unendlich kleinen dt, so heißt dieser Standard-Teil Ableitung $x'(t_0)$; die Funktion $x(t)$ heißt an der Stelle t_0 differenzierbar.

Wir lesen aus unserer Rechnung nach Übergang zu den Standard-Teilen ab: Wenn x und y differenzierbar sind, so ist auch $x \cdot y$ differenzierbar, und es gilt die Produktregel $(xy)' = xy' + x'y$.

Leider ist nun alles etwas umständlicher geworden als bei Leibniz, aber das müssen wir der Genauigkeit halber in Kauf nehmen. Der Differenzial-Quotient ist ja im Allgemeinen eine hyperreelle Zahl, die Ableitung ist bei reellem Argumentwert stets reell. Quotientenregel und Kettenregel mag der Leser selbst beweisen. Damit haben wir den wichtigsten Teil der Differenzialrechnung begründet. Die Integration lassen wir zunächst beiseite und wenden uns Euler und seiner ‚algebraischen Analysis' zu.

2. Leonard Euler und die Analysis des Unendlichen

Euler wurde 1707 in Basel geboren. Dort lernte er bei Johann Bernoulli die neueste Mathematik so selbstverständlich wie andere das kleine Einmaleins. Schon mit 20 Jahren verließ er Basel für immer. Er wirkte in St. Petersburg, von 1741–1766 in Berlin, und dann wieder bis zu seinem Tod 1783 in St. Petersburg. Er war der herausragende Mathematiker des 18. Jahrhunderts, auf allen Gebieten auch denen der Anwendungen. Niemand sollte versäumen, das kürzlich erschienene Bändchen zu lesen, welches der Leiter des Basler Euler-Archivs, E. Fellmann, verfaßt hat; auch der Band zum 200. Todestag Eulers ist lohnend (Fellmann 1995, Euler 1983). Wir bringen nur winzige Ausschnitte aus Eulers monumentalem Werk, aber solche, welche die Denkweise seiner Zeit gut verdeutlichen.

Gelegentlich hatten schon Leibniz und die Bernoullis von unendlich großen Zahlen Gebrauch gemacht, nicht nur von den unendlich kleinen der Diffenzialrechnung. Völlig selbstverständlich geht Euler mit unendlich großen natürlichen Zahlen um und denkt sich unendliche Reihen auch über Summanden mit unendlich großen Indizes erstreckt. Sehr zu empfehlen ist die 1734 verfaßte Abhandlung über die harmonischen Reihen (*De progressionibus harmonicis observationes*, Euler Op. ser. I vol. 14, 73–86).

Es war längst bekannt, dass die Integration der Hyperbelfunktion $y = 1/x$ den natürlichen Logarithmus ergibt, und wenn man Obersummen und Untersummen zu ganzzahligen Teilpunkten bildet, erhält man mit Euler

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + C_N ,$$

und zwar ist für unendlich große N stets $C_N \approx C = 0{,}577\ldots$ mit der sogenannten Eulerschen Konstanten C. Damit folgt sofort

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2N}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log 2N + C_{2N} - \log N - C_N \\
&\approx \log 2N - \log N = \log \frac{2N}{N} = \log 2 .
\end{aligned}$$

Euler erhält nach dem gleichen Muster auch zuvor noch nicht bekannte Summenwerte. Der Leser finde selbst Eulers Reihe für $\log 3 = \log 3N - \log N$.

Es ist nicht schwer, diese Reihensummen durch Betrachtung endlicher Partialsummen und anschließenden Grenzübergang ‚streng' zu verifizieren – aber für Euler gibt es keine Grenzwertüberlegungen. Und wir wollen ja seine und seiner Zeitgenossen Denkweise kennen lernen und nicht mit unserem späteren Besserwissen an die Sache herangehen.

In der Sekundärliteratur hält sich hartnäckig das Urteil, Euler habe sich nicht um Konvergenz gekümmert. Doch findet sich bereits in der frühen Arbeit über die harmonischen Reihen ein Konvergenzkritierium, genauer: Eine Bedingung dafür, wann eine Reihe eine endliche Summe hat. Wenn eine Reihe eine endliche Summe hat, dann ist das, was nach einem unendlichen Gliede hinzugefügt wird, in Wirklichkeit unendlich klein. Und umgekehrt, wenn das, was aus der Fortsetzung über einen unendlichen Term hervorgeht, von endlicher Größe wäre, müsste die Reihensumme notwendigerweise unendlich groß sein. (Die letzte Bedingung gilt so nur für Reihen mit nichtnegativen Gliedern!)

In Formeln: $\sum a_n$ ist endlich (die Reihe ist konvergent) genau dann, wenn für unendlich großes N stets gilt $\sum_{n \geq N} a_n \approx 0$.

Euler ist niemals besonders interessiert gewesen an allgemeinen begrifflichen Erörterungen, sie sind ihm aber, wie wir hier sehen, nicht fremd. Vielmehr geht es ihm um die algorithmische Anwendung.

Für die allgemeine harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n^p}$ hat er bei $0 < p < 1$

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n^p} > N \cdot \frac{1}{(2N)^p} = \frac{1}{2^p} N^{1-p},$$

und das ist unendlich groß, die Reihe divergiert. Für $p > 1$ kann er auf Konvergenz schließen. Das alles war längst bekannt, etwa durch Integralvergleich, und wenn Euler es hier erneut beweist, so vermutlich, um seine Konvergenzbedingung zu benutzen, die dann auch für alternierende Reihen nützlich ist, bei denen der Integralvergleich nicht greift. (Für weitere Einzelheiten sei auf mein Buch von 1986 verwiesen.)

Eulers Originalarbeiten waren schwer zugänglich, da sie versteckt publiziert wurden und meist in Latein, nur manchmal in Französisch abgefasst waren. So wirkten auf breitere Kreise vor allem seine Lehrbücher, die bald auch in (allerdings schlecht) kommentierten deutschen Übersetzungen erschienen. Offenbar wurde Latein auch damals schon nicht von allen interessierten Lesern hinreichend verstanden! Das Bild von Euler als Mathematiker wurde für lange Zeit mehr von diesen elementaren Büchern geprägt als von den tieferen Originalarbeiten. Das wollen wir im Auge behalten, wenn wir uns jetzt seiner *Introductio in analysin infinitorum* (erschienen 1748) zuwenden. Die spätere Übersetzung von H. Maser ist heute in einem Nachdruck mit brauchbarem Kommentar bequem erhältlich.

Die wörtlich richtige Titelübersetzung *Einführung in die Analysis des Unendlichen* sollte man vielleicht durch die sinngemäßere *Einführung in die Problemlösung mittels der Unendlichen* [Zahlen und Prozesse] ergänzt denken. Euler algebraisiert unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche. Er tastet die Möglichkeiten ab, welche sich durch formale Verallgemeinerung aus der algebraischen Rechnung mit endlichen Formelausdrücken und Unendliche ergeben. Insbesondere werden Potenzreihen als Polynome unendlichen Grades behandelt.

Typisch ist sein Vorgehen bei der Exponentialfunktion, welche definiert (!) wird als

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

mit einer unendlich großen natürlichen Zahl N. Darauf kann er die Binomialformel anwenden und erhält:

$$1 + N \cdot \frac{x}{N} + \frac{1}{2!}\frac{N(N-1)}{N^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{N(N-1)\,(N-2)}{N^3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Nun wird es bedenklich: Da $\frac{1}{N} = \frac{2}{N} = \ldots = 0$, bekommt man die Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots .$$

Euler weiß ganz genau, und sagt es an anderen Stellen auch, dass man unendlich viele unendlich kleine Fehler nicht einfach zu Null aufsummieren kann – das zeigt ja schon das Integral als Summe unendlich vieler unendlich kleiner Rechtecksflächen. Dass die Reihe konvergiert, wenn x reell oder sogar komplex ist, könnte er leicht aus seinem Konvergenzkriterium beweisen, welches er allerdings im Buch nicht erwähnt. Man braucht ja für den Reihenrest im Unendlichen nur eine geometrische Majorantenreihe heranzuziehen. Dann sind die Partialsummen endlicher Länge schließlich beliebig nahe beim Summenwert, und da die Partialsummen derselben Länge für die Binomialentwicklung sich nur unendlich wenig von jenen unterscheiden, folgt die Behauptung.

Jedenfalls sollten wir $e^x \approx \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ schreiben. Die Überlegung zeigt nebenbei, dass es auf die spezielle Wahl der unendlich großen natürlichen Zahl N nicht ankommt.

Wenn $y = e^x$, so ist $x = \log y$. Aber aus $y = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ folgt $x = N(y^{1/N} - 1)$.

Da eine N-te Wurzel im allgemeinen N komplexe Werte hat, wird man die unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus erwarten. So löst Euler im Jahre 1749 im algebraischen Stil seiner *Introductio* eine Streitfrage, die seine beiden großen Vorgänger in den Jahren 1712–1713 erregt hatte. Der Briefwechsel war 1745 erschienen, und Eulers Aufsatz ist betitelt: *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires* (Euler Op. ser. I, vol 17).

Der Aufsatz ist in der Sprache des Hofes zu Berlin geschrieben und sollte wohl nach Eulers Absicht eine breite Leserschaft finden. Dafür spricht auch eine ausführliche Erörterung von Details in diesem Meisterstück der Darstellung, das auch Studenten und Schülern zugänglich ist.

Euler bespricht die Argumente der beiden Kontrahenten. Bernoulli hatte gemeint, es sei $\log(-1) = 0$, was man aus der Funktionalgleichung begründen könnte: $0 = \log 1 = \log(-1)^2 = 2\log(-1)$. Leibniz hielt entgegen, dass die Exponentialfunktion für alle reellen Argumente positiv ist, sodass der Logarithmus von -1 sicher nicht reell sein könne. Beide führten noch weitere Begründungen auf. Bis zu Eulers überraschender Lösung blieb die Angelegenheit ungeklärt. Dieser berechnet nun auch noch die

unendlich vielen Werte explizit. Nehmen wir etwa $y = 1$, so ist nach der bekannten Formel von de Moivre

$$y^{\frac{1}{N}} = \cos\frac{2\pi g}{N} + i \cdot \sin\frac{2\pi g}{N}$$

für jede ganze Zahl g. Für endliches g hat man $N\left(\cos\frac{2\pi g}{N} - 1\right) \approx 0$ und $N\sin\frac{2\pi g}{N} \approx 2\pi g$, also $\log 1 = 2\pi g$ für jede ganze Zahl g. Allgemein für komplexes $z \neq 0$ erhält Euler $\log z = \log r + i(\alpha + 2\pi g)$, wenn $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$.

Der kundige Leser wird bemerken, dass Euler das alles mit seiner berühmten Formel $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$ auch einfacher hätte haben können – durch Anwendung der Funktionalgleichung des Logarithmus auf $z = r \cdot e^{i\alpha} = r \cdot e^{i(\alpha + 2\pi g)}$. Er war schon seit einigen Jahren im Besitz dieser Formel, aber sie war noch nicht allgemein akzeptiert. Und selbst seine algebraische Lösung der Kontroverse überzeugte nicht alle Zeitgenossen; d'Alembert verteidigte die Bernoullische Position noch bis 1761.

Warum war die Frage eigentlich so wichtig, dass die größten Geister sich ihrer nachhaltig annahmen? Ein Hauptproblem zu Anfang des Jahrhunderts war die unbestimmte Integration. Während man für die Differentiation von Funktionen einen Algorithmus hatte, der z. B. aus rationalen Funktionen wieder rationale Funktionen herstellt, war das bei der Umkehroperation, der Integration, weniger einfach. Im Jahre 1702 hatten Leibniz und Johann Bernoulli unabhängig voneinander die Integration der rationalen Funktionen durch Partialbruchzerlegung untersucht. Aus

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\}$$

bekommt man die Formel

$$\int\frac{dx}{x^2 - i^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a},$$

und es lag nahe, diese Gleichung auch für $a = i = \sqrt{-1}$ zu verwenden, selbst wenn man schon wusste, dass hier der Arkustangens auftrat, der dann eben auf Logarithmen komplexer Zahlen zurückgeführt werden konnte. Daher waren diese durchaus von Interesse.

Man hätte der Lösung schon etwas näher kommen können, wenn man in

$$\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2i}\log\frac{x-i}{x+i}$$

Integrationsgrenzen gewählt und die bekannten Werte des Arkustangensintegrals eingesetzt hätte:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i}[\log 1 - \log 1]$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i}[\log 1 - \log(-1)]$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i}[\log(-1) - \log 1]$$

Schon aus der ersten Beziehung sieht man, dass man log 1 nicht nur den Wert 0 zuschreiben kann, und die beiden anderen Gleichungen legen $\log(-1) = \pm i\pi$ nahe. Welche Werte man im Einzelfall zu nehmen hatte, das konnte auch Eulers algebraische Lösung nicht entscheiden. Dazu bedurfte es noch eines ganzen Jahrhunderts, bis Riemann seine Flächen einführte, die die Behandlung mehrwertiger Funktionen durchsichtig machen sollten. Die Riemannschen Flächen waren übrigens gerade aus dem Problem der Integration algebraischer (und speziell rationaler) Funktionen hervorgegangen.

Von den Untersuchungen zu weiteren elementaren Funktionen in der *Introductio* sei hier noch die Reihenentwicklung des Logarithmus erwähnt, die ebenfalls an die Auflösung von $y = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ nach x anknüpft. Setzt man $y = 1 + h$, $x = \log(1 + h)$, so hat man

$$\log(1 + h) = (1 + h)^{1/N} - 1.$$

Seit Newton war es legitim, die Binomialreihe auch für beliebige reelle Exponenten zu verwenden, und damit erhält man für $|h| < 1$:

$$\begin{aligned}\log(1 + h) &= N \cdot \frac{1}{N}h + \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} - 1\right)h^2 + \frac{N}{3!} \cdot \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} - 1\right)\left(\frac{1}{N} - 2\right)h^3 + \dots \\ &\approx h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - + \dots\end{aligned}$$

3. Kritik und frühe Rechtfertigungsversuche

Der wunde Punkt beim Leibnizschen Kalkül war die „Gleichheit" $x + dx = x$. Die vehementeste Kritik an der mangelhaften Begründung des Kalküls kam nach 1700 aus Paris, dem damaligen Zentrum der Forschung, wo auch Leibniz selbst von 1672–1676 im Kontakt mit Huygens und aus Schriften von Pascal die entscheidenden Anregungen erhalten hatte. Am 2. Februar 1702 schreibt Leibniz an seinen Pariser Verbündeten Varignon einen ausführlichen Brief, den dieser sofort veröffentlicht. Einige Jahre später bekennen sich die Pariser zum neuen Kalkül, und auf dem Kontinent gibt es dann kaum noch Einwände.

Leibniz gibt mehrere Rechtfertigungsgründe. Man könne die unendlichen und unendlich kleinen Strecken, selbst wenn man sie nicht als reelle Dinge betrachte, unbedenklich als ideale Begriffe verwenden, ähnlich wie die imaginären Zahlen. Es sei bequemer, ein für allemal den Begriff des Unvergleichbarkleinen einzuführen, statt stets von Größen zu reden, die unbegrenzter Verminderung fähig sind. (Doch, wie der oben zitierte Brief an Wallis schon zeigte, rechtfertigt die letztere Sprechweise den Kalkül, indem sie zeigt, dass der Fehler stets kleiner ist als jede angebbare Größe.)

Das ist ein sozusagen pragmatisches Argument: Der Kalkül mit Differenzialen ist bequemer als die Redeweise von den sich beständig vermindernden Größen, also die Grenzwertmethode, welche übrigens Newton propagierte. Dann kommt aber noch ein ‚metaphysisches' Argument, eine Berufung auf das allgemeine Kontinuitätsprinzip. Leibniz sagt, die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter, und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche. Das ist eine interpretationsbedürftige Fassung. Welche Regeln sind gemeint? Sicher gehören dazu die algebraischen Regeln, wie er sie ohne weiteres von den reellen Zahlen auf die Differenziale überträgt. Aber auch der Eulersche Gebrauch unendlich großer natürlicher Zahlen entspricht diesem Prinzip von der Permanenz der Rechenregeln. Leibniz selbst hat zu wenig aufge-

schrieben, und eine systematische Darstellung fehlt ganz. Man kann also bei ihm nicht, wie es bei Euler immerhin möglich scheint, aus dem tatsächlichen Gebrauch mit voller Sicherheit auf die Bedeutung allgemeiner Aussagen über die Gültigkeit von Regeln schließen.

Wenn wir Eulers Gebrauch des unendlich Großen und Kleinen in den Arbeiten zu den Reihen und in der *Introductio* noch mit diesem Prinzip in Einklang bringen können, so geht das nicht mehr ohne weiteres in seiner Differenzialrechnung, die 1755 erschien. Dieses Buch enthält ein ganzes Kapital *Vom Unendlichen und vom unendlich Kleinen*, mit dem man kaum etwas anfangen kann und das wohl mehr Verwirrung stiftete als Klarheit brachte. Ich gehe hier nicht weiter darauf ein (und weise auf mein Buch von 1986, S. 206–211, hin).

Der Kalkül bezog seine Überzeugungskraft aus den unbestreitbaren Erfolgen, die er im 18. Jahrhundert zeitigte. Das Bedürfnis nach einer sauberen Begründung war aber nicht zu unterdrücken. Hier ist vor allem J. L. Lagrange (1736–1813) zu nennen, der 1766 Nachfolger Eulers in Berlin wurde. Er veranlasste 1784, ein Jahr nach Eulers Tod, ein Preisausschreiben der Berliner Akademie. In der Aufgabenstellung wird darauf angespielt, dass viele Philosophen und Mathematiker das Unendliche für widerspruchsvoll hielten. Als Aufgabe wird gestellt zu erklären, wie so viele richtige Resultate aus einer widerspruchsvollen Annahme hergeleitet werden können, und es solle ein klares, wahrhaft mathematisches Prinzip angegeben werden, welches das Unendliche zu ersetzen vermöge, ohne dass jedoch die Einfachheit und Knappheit der Herleitung verlorengehe.

Keine der etwa zwei Dutzend eingereichten Arbeiten befriedigte Lagrange, so dass er schließlich 1797, dann in Paris, seinen eigenen Lösungsvorschlag publizierte. Der lange Titel seines Buches sagt deutlich, was Lagrange vorschwebte: *Theorie der analytischen Funktionen, enthaltend die Grundlagen des Differenzialkalküls, befreit von jeglicher Betrachtung des unendlich Kleinen, der Verschwindenden, der Grenzwerte und der Fluxionen, und zurück geführt auf die algebraische Analyse der endlichen Größen.*

Lagrange's analytische Funktionen sind (formale) Potenzreihen

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot g(x) + h^2 [\ldots] ,$$

die er ohne Konvergenzüberlegungen zu behandeln sich vorgenommen hat. Wenn sein Versuch auch scheiterte, so hat er doch einen nachhaltigen Einfluss ausgeübt. Das $g(x)$ in der obigen Formel ist die abgeleitete Funktion, für die er $f'(x)$ schreibt. Die Ableitungsfunktion tritt von jetzt an gegenüber dem Differenzialquotienten in den Vordergrund. Da Lagrange auch Anordnungseigenschaften untersucht, kann er erstmals Restglieder abschätzen. Es sei noch angemerkt, dass auch Lagrange, wenn es um die Anwendungen ging, pragmatisch dachte. In seiner analytischen Mechanik wird mit Differenzialen gerechnet.

4. Neue Anforderungen aus der Physik

Schon um 1750 hatte sich gezeigt, dass die algebraisch-algorithmische Auffassung von Funktion für physikalische Anwendungen nicht ausreichte. Das berühmte Beispiel ist die schwingende Saite, für deren Behandlung Daniel Bernoulli (1700–1782), ein Sohn Johanns, trigonometrische Reihen wie $\sum b_n \sin nx$ unentbehrlich fand.

Er und Euler erkannten, dass solche Reihen ziemlich willkürliche Funktionen darstellten, die sich ganz anders verhielten als die bisher zugelassenen Funktionen. Insbe-

sondere brauchten sie nicht durchweg demselben „Gesetz“ zu genügen. So fand man, dass

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$$

für $0 < x < 2\pi$ gleich $\frac{\pi - x}{2}$ ist, für $2\pi < x < 4\pi$ aber gleich $\frac{3\pi - x}{2}$.

Die Summenfunktion ist stückweise linear und springt an allen ganzen Vielfachen von 2π. Euler fand das durch Summation der geometrischen Reihe mit dem Quotienten $q = re^{ix}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{1}{1 - re^{ix}} = \frac{1 - re^{-ix}}{(1 - re^{ix})\,(1 - re^{-ix})}$$

$$= \frac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2},$$

und für den Realteil ergibt sich dann

$$1 + r\cos x + r^2\cos 2x + r^3\cos 3x + \ldots = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

Das ist richtig für $0 < r < 1$, doch verwenden wir die Formel mit Euler zunächst unkritisch auch für $r = 1$,

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = \frac{1}{2}.$$

(1754; vgl. Opera ser. I, 14, S. 542–584 und 15, S. 435–497.)

Integration führt tatsächlich zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\pi,$$

wobei sich die Integrationskonstante aus dem Wert 0 der Reihe für $x = \pi$ ergeben hat.

Anders als 20 Jahre zuvor rechnet Euler nicht mehr mit eventuell unendlich großen Werten divergenter Reihen, sondern er ordnet solchen Reihen den Zahlwert des Ausdrucks zu, aus dessen Entwicklung die Reihe entstanden ist, hier also $\frac{1}{1-q}$ für die Entwicklung in die geometrische Reihe. Der Physiker Daniel Bernoulli schließt sich in drei Noten aus den Jahren 1771–1773 dieser algorithmischen Auffassung an und entwickelt sie weiter (D. Bernoulli, Werke Bd. 2, Basel 1982; der Herausgeber sieht das als eine Anwendung des leibnizschen Kontinuitätsprinzips).

So fragwürdig die Methode uns erscheinen mag, so waren die Erfolge doch nicht zu bezweifeln. Und wie bei den Differenzialen haben wir die Herausforderung: Eine erfolgreiche Vorgehensweise sollte sich auch sauber begründen lassen. (In meinem Buch von 1986 ist (S. 181 ff.) ausgeführt, wie man das heute tun kann.)

Die moderne feldtheoretische Auffassung der Physik beginnt mit der Theorie der Wärme, welche J.-B. Joseph Fourier (1768–1830) ab 1807 ausarbeitet und die schließlich alle physikalischen Größen als Lösungsfunktionen von (parziellen) Differenzialgleichungen betrachten will. Da diese Funktionen reellen Meßwerten der physikalischen Größen zu entsprechen haben, sieht man nur noch solche Funktionen als brauchbar an, welche für jeden reellen Argumentwert einen reellen Funktionswert lie-

fern; damit sind diejenigen Funktionen, welche durch formale Ausdrücke inklusive divergenter Reihen gegeben sind, zunächst ins Abseits geraten.

5. Cauchy 1821: Stetigkeit und Konvergenz

Neben Fourier und Simeon Denis Poisson (1781–1840) war Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) einer der fruchtbarsten Bearbeiter der neuen mathematischen Physik. Ab 1816 lehrte er an der Pariser Ecole polytechnique, die seit ihrer Gründung 1795 ein reguläres, anspruchsvolles Grundstudium in Mathematik anbot, welches für die Entwicklung des universitären Lehrbetriebs beispielhaft werden sollte. Brauchbare Lehrbücher gab es kaum, wenn man von dem von Lacroix hier einmal absieht, und Cauchy wurde gedrängt, Texte zu seinen Vorlesungen zu verfassen. Was daraus wurde, sind allerdings eher systematische Darstellungen zu den Grundlagen der Analysis als für die damaligen Studenten brauchbare Lernhilfen. Wie so mancher Lehrbuchverfasser nach ihm dachte Cauchy beim Abfassen wohl mehr an die wissenschaftliche Forschung als an die Lehre für Anfänger. Doch verdanken wir dieser Tatsache grundlegende Neugestaltungen der Analysis. Cauchy begründete die Ablösung des algorithmischen Denkens durch ein Denken in Begriffen.

Funktionen waren nicht mehr durch Ausdrücke gegeben. Im Cours d'analyse von 1821 beginnt das Kapitel I über Reelle Funktionen mit dem Satz: „Wenn veränderliche Größen so miteinander verknüpft sind, dass bei Vorgabe des Werts der einen von ihnen die Werte aller anderen erschlossen werden können, dann denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Größen mittels einer von ihnen ausgedrückt, welche dann den Namen unabhängige Veränderliche trägt; und die anderen mittels der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Größe sind das, was man Funktionen dieser Veränderlichen nennt." Und das Kapitel II beginnt: „Man sagt, dass eine veränderliche Größe unendlich klein wird, wenn ihr Absolutbetrag unbegrenzt abnimmt, derart, dass er gegen die Grenze Null konvergiert."

Die Beschreibungen hier wird man nicht ohne weiteres als Definitionen ansehen, aus welchen Sätze deduziert werden können; es handelt sich eher um Erläuterungen des Sprachgebrauchs. Und man kann auch nicht deutlich sehen, ob Cauchy sich von der Auffassung einer Funktion als eines „Analytischen Ausdrucks" distanziert. Es kommt eben darauf an, wie gearbeitet wird, und das zeigt sich beim Begriff der Stetigkeit von Funktionen. Es wird aus der begrifflichen Eigenschaft gefolgert, nicht aus der Darstellung durch einen speziellen Ausdruck.

Die Stetigkeit einer in einem Intervall gegebenen Funktion $f(x)$ wird in § 2 von Kapitel II definiert: Sei α ein unendlich kleiner Zuwachs von x. Dann heißt $f(x)$ stetig in diesem Intervall, „wenn der Absolutbetrag von $f(x + a) - f(x)$ mit dem von a unbeschränkt abnimmt. Mit anderen Worten, die Funktion $f(x)$ wird stetig bezüglich x innerhalb der gegebenen Grenzen sein, wenn in diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Variablen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion selbst hervorbringt." Diese alternative Erklärung druckt Cauchy kursiv.[1]

Das sieht ganz so aus, als wäre die Redeweise vom unendlich Kleinen nur eine Abkürzung für „gegen die Grenze 0 gehen". Aber man muss nachsehen, wie Cauchy damit arbeitet, und dazu betrachten wir sein Theorem I über stetige Funktionen: Wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von (x_0, y_0) in jeder der Veränderlichen x, y stetig ist, dann hat $f(x, y)$ den Limes $f(x_0, y_0)$, wenn x, y gegen x_0, y_0 konvergieren.

Die Formulierung sagt nichts von unendlich kleinen Größen, und es gibt „Gegenbeispiele", etwa $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0,0) = 0$.

Für jedes feste reelle x ist die Funktion stetig in y, für jedes feste y ist sie stetig in x. Setzt man $x = y = t$ und lässt t gegen 0 gehen, so ergibt sich $\frac{1}{2} \neq 0$.

Wie beweist Cauchy den so offensichtlich falschen Satz?

Es bezeichnen α, β unendlich kleine Größen.

Dann ist $f(x + \alpha, y + \beta) - f(x, y) = [f(x + \alpha, y + \beta) - f(x + \alpha, y)] + [f(x + \alpha, y) - f(x, y)]$ unendlich klein, weil die erste Klammer rechts wegen der Stetigkeit in der zweiten Variablen eine unendlich kleine Größe ist, die zweite wegen der Stetigkeit in der ersten Variablen.

Wie steht es mit unserem Gegenbeispiel und der ersten der beiden Klammern bei $x = y = 0$?

Sie wird zu $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, und das ist für unendlich kleine Größen α, β nicht immer unendlich klein, z. B. nicht für $\alpha = \beta \neq 0$.

Cauchy gibt selbst in anderen Zusammenhängen gern Gegenbeispiele, und es kann angenommen werden, dass er solch ein Beispiel wie unseres hier selbst gesehen hätte. Man wird seine Voraussetzung daher so zu interpretieren haben, dass $f(x, y)$ in der Veränderlichen y stetig ist für jedes feste $x = x_1 + a_1$, x_1 reell und a_1 eine (feste!) unendlich kleine Größe. Das scheint der anfangs gegebenen Beschreibung der unendlich kleinen Größen als Variable, die gegen Null konvergieren, allerdings zu widersprechen.

Ein analoges Dilemma finden wir bei Cauchys Theorem I über konvergente Reihen stetiger Funktionen. Seien $s_n(x)$ die Partialsummen einer Reihe, also stetige Funktionen, und konvergiere diese Folge für alle x eines Intervalls. Die Grenzfunktion sei $s(x)$. Dann hat man

$$s(x + \alpha) - s(x) = [s(x + \alpha) - s_n(x + \alpha)] + [s_n(x + \alpha) - s_n(x)] + [s_n(x) - s(x)],$$

und hier ist die zweite Klammer rechts wegen der Stetigkeit von s_n bei unendlich kleiner Größe α immer unendlich klein. Sicher ist wegen der Konvergenz bei x die letzte Klammer absolut kleiner als ein gegebenes reelles $\varepsilon > 0$ für $n \geq N(\varepsilon)$. Wenn das auch für die erste Klammer gilt, erhalten wir $|s(x + \alpha) - s(x)| < 3\varepsilon$ für beliebiges positives reelles ε; also ist $s(x + \alpha) - s(x)$ selbst eine unendlich kleine Größe, $s(x)$ also eine stetige Funktion. Und das formuliert Cauchy tatsächlich als Satz: „Wenn die verschiedenen Glieder einer Reihe Funktionen der Variablen x sind, welche bezüglich dieser Variablen stetig in der Umgebung eines speziellen Wertes sind, für welche die Reihe konvergent ist, so ist die Summe der Reihe in der Umgebung dieses speziellen Wertes auch eine stetige Funktion von x."

Der Originaltext ist: „Lorsque les différens termes de la série sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x."

Es wird also Konvergenz in der Umgebung von $x = x_0$ vorausgesetzt, und im Beweis wird das so verwendet, dass $s_n(x_1 + \alpha_1)$ für reelles festes x_1 und unendlich kleines festes α_1 gegen $s(x_1 + \alpha_1)$ konvergiert.

Hier ist es nun ganz sicher, dass Cauchy die nahe liegenden Gegenbeispiele, Fourier-Reihen für unstetige Funktionen, sehr wohl kannte, denn er verwendete sie in seinen Forschungsarbeiten schon seit Jahren. Noch einfacher setze man $s_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}$.

Diese Folge stetiger Funktionen konvergiert für alle reellen $x \neq 0$ gegen 1, für $x = 0$ aber gegen 0. Was ist in der Umgebung von $x = 0$ los? Für $x = \alpha$ betrachten wir verschiedene „Variable mit Grenze Null" und untersuchen $s_n(\alpha)$ auf Konvergenz. Dazu müssen wir Cauchys Konvergenzbegriff heranziehen.

Dass die s_n gegen einen festen Limes s konvergieren, heißt „in anderen Worten, es ist notwendig und es genügt, dass sich für unendlich große Werte der Zahl n die Summen s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, etc. ... vom Limes s, und folglich auch untereinander, um unendlich kleine Größen unterscheiden". Sind also n und n' beides unendlich große Zahlen, so muss $s_n - s_{n'}$ eine unendlich kleine Größe sein. (Eine unendlich große Zahl ist eine variable Größe mit Limes $+\infty$, wie Cauchy anfangs erklärt hat.)

Wählen wir für unser Beispiel eine feste unendlich kleine Größe $\alpha = \frac{1}{m}$, m eine unendlich große Zahl. Setzen wir $n = m^2$ und $n' = m$, so ist

$$s_n(\alpha) - s_{n'}(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1},$$

und das ist nicht unendlich klein. Also ist die Voraussetzung der Konvergenz in der Umgebung von $x = 0$ nicht erfüllt, es liegt kein Gegenbeispiel vor.

Es wird nicht verwundern, dass Cauchy's Sätze für falsch gehalten wurden. Zuerst äußerte sich Abel – ein großer Bewunderer von Cauchy's Strenge in der Analysis – skeptisch, wenn auch nur in einer Fußnote zu seiner Arbeit über die binomische Reihe vom Jahre 1826 mit einem Hinweis auf die Fourier-Reihen. Erst seit Robinson 1966 hat man wieder versucht, Cauchy's Rede von den unendlich kleinen Größen und den unendlich großen Werten der Zahl n ernst zu nehmen, und seitdem gibt es Dutzende von Diskussionsbeiträgen. Eine zusammenfassende Darstellung gibt Bottazzini 1992.

Man muss wohl, will man die zweifellos vorhandenen Unklarheiten verstehen, auf die Entwicklung bei Cauchy selbst eingehen und darf nicht nur die beiden Sätze heranziehen. Dass Cauchy, der ein vielseitiger und bedeutender Mathematiker war, gerade in den beiden ersten Lehrsätzen seines Lehrbuchs von 1821 versagt haben soll, ist kaum zu glauben, zumal besonders der zweite Satz über die Stetigkeit der Reihensumme, wie wir noch sehen werden, grundlegend für den weiteren Aufbau ist.

In seinen zahlreichen Arbeiten zur mathematischen Physik und zur Fourier-Analyse aus den Jahren 1814–1820 vermeidet Cauchy jegliche Rede von unendlich kleinen Größen, er spricht nur von „sehr klein". In den zwanziger Jahren ist, oft in denselben Zusammenhängen wie früher, dann die Rede von unendlich kleinen Zahlen, und solche werden durchweg behandelt wie eigenständige mathematische Größen, ohne Rückgriff auf den Variablenbegriff. Auch im Unterricht an der Ecole polytechnique hatte Cauchy in den ersten Jahren ab 1816 das unendlich Kleine vermieden. Das stieß auf wachsende Kritik seitens der Kollegen, u. a. des Physikers Petit, die den didaktischen und praktischen Nutzen der unendlich kleinen Größen hervorhoben. Der Conseil d'Instruction an der Ecole übte 1819 und 1820 starken Druck auf Cauchy aus, aber das allein hätte bei dem ziemlich dickköpfigen Cauchy keinen Sinneswandel bewirken können. Er muss um 1820 eingesehen haben, dass die Infinitesimalbetrachtungen für die Forschung der Zeit, in der er in ständigem Wettbewerb besonders mit Poisson stand, eine schlagkräftige Methode darstellten. Allerdings hat Cauchy weiter darauf bestanden, die Ableitungsfunktion zu verwenden und nicht den Quotienten unendlich kleiner Differenziale. Vielmehr verschiebt er die Rolle der unendlich kleinen Größen hin zum Stetigkeitsbegriff.

In den einführenden Bemerkungen zum Cours heißt es dazu: „En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal."

Ab 1823 bekennt er in den Vorworten der Bücher regelmäßig, dass er die Anschaulichkeit der unendlich kleinen Größen mit der Strenge der Analysis in Einklang gebracht habe.

Cauchy war in den zwanziger Jahren ein viel beschäftigter Mann. Er unterrichtete außer an der Ecole polytechnique auch an anderen Instituten, und er publizierte Tausende von Seiten pro Jahr. Die Sorgfalt in der Abfassung ist bewundernswert. Nun muss es ihn gereizt haben, die in den Forschungsarbeiten als nützlich erkannten unendlich kleinen Größen in den gleichzeitig abzufassenden Lehrbüchern nicht nur anzuwenden, sondern auch streng zu begründen. Das ging sozusagen allmählich vor sich: Am Anfang finden sich noch traditionelle Redeweisen von Variablen mit Grenze Null oder Unendlich, im Laufe der Zeit gewinnen die unendlich kleinen Größen, bald sogar als Zahlen bezeichnet, ihre Eigenständigkeit, es wird mit ihnen umgegangen wie mit ‚richtigen' Zahlen. Und tatsächlich kommt 1823 der Durchbruch zu einer abstrakten Theorie dazu, die wir in Abschnitt 7 behandeln werden.

Man kann die Cauchyschen Texte, in zeitlicher Reihenfolge und zusammen mit den gleichzeitig verfassten Forschungsarbeiten betrachtet, unter dem Aspekt der Genese einer neuen Theorie lesen. In einem solchen Zusammenhang, aus dem man einzelne Sätze nicht herausreißen und isoliert kritisch betrachten darf, wird ein gutes Stück historischer Entwicklung verständlich.

6. Cauchy und die Binomialreihe

In Kapitel IV des Cours d'analyse behandelt Cauchy das Problem, die Funktion $(1 + x)^{\mu}$ „soweit das möglich ist" in eine Potenzreihe zu entwickeln. Die Reihe war seit Newton viel verwendet worden, und Euler und andere hatten vergeblich versucht, Beweise für beliebiges reelles μ zu finden. Ein gelungener Beweis von Bolzano aus dem Jahre 1816 wurde nicht beachtet. Heute zieht man die Taylorformel mit Restglied heran.

Cauchy definiert für festes x mit $|x| < 1$

$$\Phi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} + \ldots$$

als Funktion der reellen Veränderlichen μ. Schon vorher hat er bewiesen, dass diese Reihe konvergiert und dass die Funktion der Funktionalgleichung $\Phi(\mu) \cdot \Phi(\mu') = \Phi(\mu + \mu')$ genügt. Die Partialsummen der Reihe sind Polynome in μ, also stetige Funktionen. Aus dem Theorem I über Reihen folgt, dass $\Phi(\mu)$ auch eine stetige Funktion von μ ist.

Nun ist auch $(1 + x)^{\mu}$ als Exponentialfunktion stetig, wie bereits zuvor bewiesen wurde. Man hat also zwei stetige Lösungen der Funktionalgleichung (die beide nicht Null sind). Jedoch hat Cauchy gezeigt, dass es nur eine stetige Lösung dieser Funktionalgleichung mit $\Phi(0) = 1$ gibt. Also ist $(1 + x)^{\mu}$ gleich der Reihe.

Wie Bottazzini 1992 bemerkt, kann man diesen Beweis als einen Schlüssel zum Verständnis von Cauchy's Aufbau im Cours ansehen. Hier wird sozusagen alles gebraucht, was vorher behandelt wurde: Stetigkeit und Konvergenz, das beide Begriffe verbindende Theorem I und die Behandlung der Funktionalgleichungen. Hier zeigt sich die beweistechnische Überlegenheit von Cauchy's begrifflichem Vorgehen gegenüber den algorithmischen Methoden der Vorgänger. Entsprechendes gilt für den Zwischenwertsatz, den Cauchy im Anhang zum Cours (Note III) für stetige Funktionen beweist, während es zuvor nicht einmal gelungen war, den Satz für reelle Polynome zu beweisen. Das hatte Euler auch versucht. Nun ergibt sich der Satz nicht nur für Polynome,

sondern sogar allgemein für stetige Funktionen. Nicht aus der algebraischen Eigenschaft, Polynom zu sein, kann man folgern, sondern aus der begrifflichen Eigenschaft der Stetigkeit. Auch das hatte Bolzano bereits 1817 bemerkt. Im Unterschied zu Letzterem erwähnt Cauchy nicht, dass er hier zwei vielumworbene Probleme gelöst hat!

Als Korollar erhält Cauchy sofort für $\mu = 1/\alpha$ und Ersetzung von x durch αx bei $|x| < 1/\alpha$ die Reihe

$$(1+\alpha x)^{1/\alpha} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(1-\alpha) + \frac{x^2}{3!}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots,$$

und für unendlich kleines α gibt das die Exponentialreihe. Eulers Ansatz ist wieder zu erkennen, aber jetzt ist der Beweis korrekt. Das gilt auch für das zweite Korollar, die Logarithmusreihe betreffend:

$$(1+x)^{\mu} = e^{\mu \log(1+x)} = 1 + \frac{\mu \log(1+x)}{1!} + \mu^2(\ldots)$$

gibt

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{\mu} = \log(1+x),$$

und andererseits ist wegen der Binomialreihe

$$\frac{(1+x)^{\mu} - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - + \ldots$$

Für $\mu \to 0$ ergibt sich die Logarithmusreihe. Der Kenner von Eulers *Introductio* bemerkt, wie Cauchy hier an seinen Vorgänger erinnert. Überhaupt hat der *Cours* ja den Untertitel *Analyse algébrique* und behandelt auch sonst die Themenkreise der Introductio ‚algebraisch' ohne Verwendung der ‚transzendenten' Methoden der Differenzial- und Integralrechnung.

7. Cauchy's Zahlbegriff

Eulers Umgang mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen war nicht sehr problematisch, wenn es um Ausdrücke und ihre algorithmische Umformung nach den gewöhnlichen (rationalen) Rechenregeln ging. Hier griff das Leibnizsche Prinzip vom Weitergelten der Regeln des Endlichen.

Bei Cauchy's Denken in Begriffen wurde das anders. Wenn eine Funktion $f(x)$ durch ihre Werte $f(x_0)$ für reelle Werte x_0 des Arguments bestimmt war, wie konnte sie dann für Werte $x_0 + \alpha$ mit unendlich kleinem α bestimmt sein? Die vage Redeweise von den Variablen mit Grenze Null bedurfte einer mathematischen Präzisierung, wenn man, wie Cauchy es zunehmend tat, von unendlich kleinen *Zahlen* sprechen wollte. Man hat den Eindruck, dass er beim Abfassen seines zweiten Lehrbuches, dem *Résumé* von 1823, dieses Bedürfnis selbst spürte. Er führte nun seine *Systeme* von unendlich kleinen Größen ein. Wir erinnern zunächst an eine Begründung der reellen Zahlen und kommen dann auf Cauchy's allgemeineren Zahlbegriff zu sprechen, den man in Analogie sehen kann.

Setzt man die rationalen Zahlen als gegeben voraus, so ist eine der möglichen Erzeugungsweisen sogar mit Cauchy's Namen verbunden: Man bildet Folgen rationaler Zahlen und sondert unter diesen die Cauchy-Folgen (a_n) aus. Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m,n \geq N(\varepsilon)$ gilt, so heißt (a_n) eine Cauchy-

Folge. Jede Cauchy-Folge repräsentiert eine reelle Zahl, und zwei Folgen repräsentieren genau dann die gleiche reelle Zahl, wenn ihre Differenzen eine Nullfolge bilden. (Erst um 1900 denkt man in Äquivalenzrelationen; ich verwende hier die übrigens auch noch bei Heine und Cantor 1872 vorhandene Sprechweise.)

Cauchy kann die reellen Funktionen als gegeben voraussetzen. Eine für $u > 0$ definierte reelle Funktion $f(u)$ repräsentiert eine unendlich kleine Zahl, wenn $\lim f(u) = 0$ für $\lim u = 0$. Cauchy sagt, die Funktion $g(u) = u$ repräsentiere die Basis ω dieses so gewonnenen Systems und schreibt $f(\omega)$ für die durch $f(u)$ repräsentierte Zahl. Es ist selbstverständlich, dass man mit den Zahlen so rechnen kann wie mit den sie repräsentierenden Funktionen. Diese Auffassung eines Systems wiederholt Cauchy mehrfach, jedoch wird dieser Gedanke nicht sehr weit ausgeführt. Es fehlt u. a. eine entsprechende Erklärung für unendlich große Zahlen, die er ja auch häufig verwendet, wie wir in Abschnitt 5 bemerkten.

Eine konsequente Weiterführung seines Ansatzes kann uns zur allgemeinen Definition der Cauchy-Zahlen bringen (Laugwitz 1991):

Jede für ein Intervall $0 < u < p$ definierte reelle Funktion $f(u)$ repräsentiert eine Cauchy-Zahl; zwei solche Funktionen $f(u)$, $g(u)$ repräsentieren genau dann die gleiche Cauchy-Zahl, wenn es ein Intervall $0 < u < q$ gibt, so dass dort $f(u) = g(u)$. Wir schreiben ω für die durch die identische Funktion repräsentierte Cauchy-Zahl.

Nun erklärt man Operationen und Relationen für die Cauchy-Zahlen in nahe liegender Weise über ihre Repräsentanten.

Es ist $f(\omega) = g(\omega)$ bzw. $f(\omega) > g(\omega)$ genau dann, wenn $f(u) = g(u)$ bzw. $f(u) > g(u)$ für ein Intervall $0 < u < p$.

Dann ist $\omega^{-1} > r$ für jedes reelle r; ω^{-1} ist eine unendlich große Zahl. Die reellen Zahlen r selbst sind dabei die durch konstante Funktionen $h(u) = r$ dargestellte Cauchy-Zahlen.

Der Leser wird bemerken, dass diese Einführung analog zu der Erzeugung der reellen Zahlen über rationale Zahlfolgen ist, die ja nichts anderes sind als rationale Funktionen auf den natürlichen Zahlen. Aber wie man beim Umgang mit den reellen Zahlen dann nicht mehr daran denken muss, dass sie aus rationalen Folgen herstammen, so braucht man auch bei dem Umgang mit Cauchy-Zahlen nicht stets an ihre Herkunft zu denken, sobald man sich an den Umgang mit ihnen gewöhnt hat.

Nun kann man sagen, wie eine auf einem Intervall $x_0 \le x \le X$ erklärte reelle Funktion $F(x)$ für die Cauchy-Zahlen $\beta = b(\omega)$ im Intervall zu erhalten ist. $F(\beta) = F(b(\omega))$ ist repräsentiert durch $F(b(u))$. Das gibt Sinn, denn für kleine $u > 0$ ist ja $x_0 \le b(u) \le X$. Ohne dass das in jedem Fall erneut erwähnt werden muss, ist $F(\beta)$ wieder eine wohldefinierte Cauchy-Zahl.

Auch die Stetigkeitseigenschaft $F(x + \alpha) - F(x) \approx 0$ für $\alpha \approx 0$ ist so eingeordnet, mit unserer Symbolik $\alpha \approx 0$ für α unendlich klein.

Die Sprechweise von Systemen tritt bei Cauchy übrigens auch in der Gruppentheorie auf. Eine Gruppe – dieses Wort gebraucht er nicht – ist ein System, dessen Mitglieder z. B. durch Substitutionen (d. h. Permutationen einer endlichen Menge) repräsentiert sind. In modernisierter Sprechweise sind seine Systeme von Zahlen etwa Vektorräume, sogar Ringe. Aber das hilft nicht viel weiter, lässt jedoch verstehen, warum die Auffassung für Cauchy's Zeitgenossen noch zu abstrakt war. Das galt auch für seine und Galois' Gruppentheorie.

So wie man Letztere heute in der Sprache der modernen Algebra formuliert, kann man das auch für die Cauchy-Zahlen versuchen. Man betrachte den Ring R derjenigen reellen Funktionen, welche in einer rechtsseitigen Umgebung der 0 definiert sind und in diesem Ring das Ideal I der in einer rechtsseitigen Nullumgebung verschwindenden

Funktionen. Dann ist R/I der Ring der Cauchy-Zahlen. Vergrößert man unter Benutzung des Auswahlaxioms I zu einem maximalen Ideal J, so ist R/J sogar ein nicht archimedisch angeordneter Körper, einem *IR der Nonstandard-Analysis von Robinson entsprechend. Allerdings sind hier auch noch andere Eigenschaften von R/I und R/J als nur die algebraischen und Anordnungsrelationen von Bedeutung, z. B. die Fortsetzbarkeit der reellen Funktionen $F(x)$ von IR nach diesen Erweiterungsringen.

Um wenigstens eine Anwendung der Begriffsbildung hier explizit zu behandeln – andere finden sich in meinem Aufsatz von 1991 –, wird die logische Äquivalenz der beiden Stetigkeitsdefinitionen bewiesen.

$F(x)$ sei eine in einer Umgebung von x_0 definierte reelle Funktion.

(I) F heißt bei x_0 $\varepsilon - \delta$-stetig, wenn es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ für alle reellen x mit $|x - x_0| < \delta$.

(II) F heiße bei x_0 C-stetig, wenn $F(x_0 + \alpha) - F(x_0) \approx 0$ für alle $\alpha \approx 0$.

Aus (I) folgt (II): Sei α repräsentiert durch $a(u)$. Da $\alpha \approx 0$, ist $|\alpha| < \delta$ und also für kleine $u > 0$ auch $|a(u)| < \delta$, mithin $|F(x_0 + a(u)) - F(x_0)| < \varepsilon$ für kleine $u > 0$, also $|F(x_0 + \alpha) - F(x_0)| < \varepsilon$ für jedes positive reelle ε. Damit folgt (II).

Aus (II) folgt (I): Das beweisen wir indirekt. Angenommen, (I) wäre falsch. Es gibt also ein Ausnahme-ε, etwa $p > 0$, so dass kein δ dazu existiert. Insbesondere muss es zu jedem $u > 0$ ein $a(u)$, $0 < a(u) < u$ geben, so dass $|F(x_0 + a(u)) - F(x_0)| \geq p$.

Für $\alpha = a(\omega)$ haben wir den Widerspruch zur Voraussetzung (II).

Auch die Euler-Cauchysche Konvergenzbedingung, $s_n - s \approx 0$ für alle unendlich großen n, ist jetzt ein beweisbarer Satz. Ist sie erfüllt, so folgt die Epsilon-Bedingung. Denn sonst gäbe es ein Ausnahme-Epsilon, etwa $p > 0$, so dass zu jedem $u > 0$ ein $N(u) \geq 1/u$ existiert mit $|s_N - s| \geq p$. Dann wäre auch $|s_{N(\omega)} - s| \geq p$ und nicht unendlich klein. Die umgekehrte Richtung ist offensichtlich.

8. Differenzial und Integral

Die Darstellung der Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung, so wie sie sich durchgesetzt hat, geht auf Cauchy zurück, der sie allerdings in infinitesimalmathematischer und nicht in epsilontischer Gestalt gab. Wegen dieser historischen Bedeutung geben wir sie kurz wieder. Wenn eine Funktion $f'(x)$ die Bedingung erfüllt, dass

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \approx f'(x)$$

für alle unendlich kleinen α, so heißt sie die Ableitung von $f(x)$. Alle Regeln folgen leicht, besonders wenn man schreibt

$$f(x + \alpha) = f(x) + f'(x)\,\alpha + o(x,\alpha)\alpha \quad \text{mit} \quad o(x,\alpha) \approx 0.$$

Das Differenzial dy zu $y = f(x)$ ist für Cauchy eine Funktion von zwei Veränderlichen, $dy = f'(x)dx$, welche in der reellen Variablen dx linear ist.[2]

Im *Résumé* von 1823 wird die Differenzial- und Integralrechnung behandelt. Besonders zu beachten ist, dass Cauchy die Integrierbarkeit der stetigen Funktionen beweist. Möglicherweise war dieser Beweis mit ein Anlass für seine Hervorhebung des Begriffs der Stetigkeit, denn im 18. Jahrhundert hatte man Integrale durchweg als Stammfunktionen aufgefasst, und das war nicht mehr ausreichend für die neuen Bedürfnisse der

mathematischen Physik, die auch die Integration von solchen Funktionen verlangten, für die keine Stammfunktion bekannt war.

Es sei also $f(x)$ eine auf dem Intervall $a \le x \le b$ stetige reelle Funktion und $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n < x_{n+1} < \ldots < x_n = b$ eine Intervallteilung mit $a_n = x_n - x_{n-1} \approx 0$. Alle Zahlen im n-ten Teilintervall liegen unendlich nahe bei ein und derselben reellen Zahl und unterscheiden sich wegen der Stetigkeit von $f(x)$ nur unendlich wenig vom Funktionswert an dieser Stelle, so dass es M_n, m_n gibt mit $M_n - m_n \approx 0$ und $M_n \ge f(x) \ge m_n$ im n-ten Teilintervall. Mit den erst von Darboux um 1870 eingeführten Begriffen kann man das Oberintegral von f definieren als das Infimum aller Obersummen, das Unterintegral als das Supremum aller Untersummen. (Cauchy selbst benutzt Zwischensummen.) Man sieht sofort, dass keine Untersumme größer ist als eine Obersumme. Wenn wir zeigen können, dass die Obersumme $\sum M_n \alpha_n$ und die Untersumme $\sum m_n \alpha_n$ zu unserer infinitesimalen Intervallteilung sich nur unendlich wenig unterscheiden, dann liegen sie beide unendlich nahe bei derselben reellen Zahl, die das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt.

Nun ist für jedes reelle $p > 0$ sicherlich $0 \le M_n - m_n < p$, also

$$0 \le \sum M_n \alpha_n - \sum m_n \alpha_n = \sum (M_n - m_n)\,\alpha_n < p \sum \alpha_n = p\,(b-a)\,,$$

also ist die Differenz von Ober- und Untersumme tatsächlich unendlich klein.

Dieser sehr anschauliche Beweis vermeidet, wie Cauchy's eigener, die explizite Benutzung der Gleichmäßigkeit der Stetigkeit. Supremum und Infimum bei reellen Zahlen wird man heute auch aus anderen Gründen als bekannte Begriffe voraussetzen dürfen.

9 Fourier-Reihen stetiger Funktionen

Wenn man die grundlegenden Sätze über Differenziation und Integration gewonnen hat, kann man die Art ihrer Herleitung eigentlich vergessen, denn von nun an braucht man nur noch diese Sätze. So behielten die unendlich kleinen Zahlen ein Lebensrecht nur noch in der Physik und der Differenzialgeometrie, z. B zur Herleitung von Differenzialgleichungen aus der Betrachtung von unendlich kleinen Raum- und Zeitelementen.

Wenn man aber, wie Cauchy, eine saubere Theorie der unendlich kleinen Zahlen besaß, dann konnte man diese auch sonst verwenden, und das tat man in Paris um 1820 auch. Als ein Beispiel betrachten wir hier die Fourier-Reihen. Die folgende Überlegung findet sich nicht nur bei Cauchy und Poisson, sondern auch in einem nachgelassenen Manuskript von Gauß, vermutlich aus dem Jahre 1815. Die in Abschnitt 4 angegebene Eulersche Reihe ergibt nach leichter Umformung

$$\text{(A)}\quad \frac{1}{2} + q\cos x + q^2\cos 2x + q^3\cos 3x + \ldots + q^n \cos nx + \ldots = \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2} =: \pi\delta(x)$$

Für $\varepsilon = 1 - q \approx 0$, $\quad 0 < w \le x \le 2\pi - w$, $\quad w = \sqrt[3]{\varepsilon} \approx 0$ folgt nach Cauchy

$$0 < \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2} = \frac{\varepsilon(1+q)}{1-2q\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+q^2} = \frac{\varepsilon(1+q)}{\varepsilon^2 + 4q\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sin^2\frac{x}{2}} \le \frac{\varepsilon}{\sin^2\frac{w}{2}} \approx 0\,.$$

Die durch (A) definierte Funktion $\delta(x)$ ist 2π-periodisch, überall positiv, unendlich klein außerhalb von Intervallen der unendlich kleinen Länge $2w$ um die Werte $x = 2\pi g$, g ganz, und außerdem ist ihr Integral über ein Intervall der Länge 2π gleich 1. (Letzteres erkennt man durch gliedweise Integration der Reihe auf der linken Seite. Das ist erlaubt, wie man durch die Betrachtung der geometrischen Majorantenreihe sieht!)

Eine solche Funktion nennt man nach Dirac heute eine Deltafunktion. Die Deltafunktionen welche in der reellen Standard-Analysis keinen Platz haben, erweisen sich in Analysis und Physik geradezu als Zauberstäbe. Das hatte man schon um 1820 gewusst, aber dann geriet die Sache in Vergessenheit.

Ist $f(t)$ eine stetige Funktion der Periode 2π, so gilt

$$\text{(B)} \quad f(t) \approx \int \delta(x) f(x+t)\, dx = \int \delta(x-t) f(x)\, dx,$$

alle Integrale über irgend ein Intervall der Länge 2π genommen. Es ist nämlich für stetiges reelles $g(x)$ der Periode 2π

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x)\, g(x)\, (dx) = \int_{-\pi}^{-w} + \int_{-w}^{+w} + \int_{+w}^{+\pi},$$

und hier sind das erste und letzte Integral rechts unendlich klein, weil δ es ist. Wegen $\int_{-w}^{+w} \delta(x)\, dx \approx 1$ gibt der Mittelwertsatz für das mittlere Integral einen Wert unendlich nahe bei $g(0)$, weil Stetigkeit vorausgesetzt war.

Nun wenden wir das an auf

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} q^n \cos n(x-t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} q^n [\cos nx \cos nt + \sin nx \sin nt] .$$

Wieder dürfen wir, wie oben begründet, gliedweise integrieren, und mit den Fourier-Koeffizienten $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx$ folgt aus (B)

$$\text{(C)} \quad f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} q^n [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$$

für stetiges 2π-periodisches $f(t)$ und $1 > q \approx 1$.

Leider darf man hier nicht nachträglich $q = 1$ setzen; das gäbe die Fourier-Reihe. Aber seit 1873 ist bekannt, dass die Stetigkeit einer Funktion nicht hinreichend dafür ist, dass diese gleich ihrer Fourier-Reihe ist. Dieses Resultat von du Bois-Reymond kam als Überraschung, zuvor hatte man an die Entwickelbarkeit geglaubt. Im genannten unpublizierten Manuskript begeht auch Gauß diesen Fehlschluss. Cauchy war vorsichtiger: Er sagte, die Fourier-Reihe

$$\text{(D)} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

sei dann gleich der Funktion, wenn beide Reihen, (C) und (D), konvergieren. Das wird der Leser selbst bestätigen.

Literatur

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg und München 1954.
Bottazzini, U.: S. Cauchy 1821/1992.
Cauchy, A. L.: Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique = Œuvres ser. 2 vol. 3; Reprint, with an Introduction by U. Bottazzini, Bologna 1821/1992.
Cauchy, A. L.: Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal = Œuvres ser. 2, vol 4, 1823.
Euler, L.: Introductio in analysin infinitorum = Opera omnia ser. 1 vol. 8; deutsche Übersetzung von H. Maser mit einer Einleitung von W. Walter: Einführung in die Analysis des Unendlichen. Springer 1748/Heidelberg 1994.
Euler, L.: Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Basel 1983.
Fellmann, E.: Leonhard Euler. Rowohlts Monographien 1995.
Laugwitz, D.: Zahlen und Kontinuum. Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik. BI Mannheim 1986/1994.
Laugwitz, D.: Cauchy-Zahlen als Grundlage der Infinitesimalmathematik. Mathematische Semesterberichte 38, 175–213, 1991.
L'Hospital, G. F. A.: Analyse des infiniment petits. Paris 1696.
Robinson, A.: Nonstandard Analysis. Amsterdam 1966. (Paperback, mit einem Vorwort von W. A. J. Luxemburg: Princeton University Press 1995).

Anmerkungen

1 Der an der heutigen Schulmathematik orientierte Leser mag Anstoß nehmen an der Ausdrucksweise ‚die Funktion $f(x)$', welche wir hier im Anschluß an Cauchy durchweg verwenden wollen. Sie ist vollkommen einwandfrei, wenn wir – wie es seit Cauchy üblich wurde – die letzten Buchstaben des Alphabets $x, y, z, u, v, \ldots$ als Zeichen für Variable nehmen und indizierte Buchstaben $x_0, y_1, \ldots$ oder die ersten Buchstaben des Alphabets $a, b, c, \ldots$als Zeichen für feste Werte. Die Definitionsbereiche, hier stets Intervalle, sind aus dem Kontext ersichtlich. Die Angst vor der Verwechslung von Funktion und Funktionswert ist ein Anfängerproblem, das der Fortgeschrittene und der verständige Anwender nicht mehr haben sollten!
2 Übrigens ist die nach Cauchy definierte Ableitungsfunktion von selbst stetig. Mit der Variablensubstitution $z = x + \alpha$ und $\beta = -\alpha$ gilt ja

$$f'(z) \approx \frac{f(z+\beta) - f(z)}{\beta} = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \approx f'(x)$$

also $f'(x+\alpha) \approx f'(x)$ für jedes unendlich kleine α.
Der Schulmathematiker mag es anstößig finden, dass alle Ableitungsfunktionen stetig sind, aber die moderne Analysis in der Forschung pflegt fast immer die stetige Differenzierbarkeit vorauszusetzen, die logisch äquivalent mit der gleichmäßigen Differenzierbarkeit ist:

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x+h)}{h-k} \text{ für } h,k \to 0 .$$

Einführung der Integralrechnung über die Infinitesimalanalysis

Ein Erfahrungsbericht

von Cordula Utecht

Im Rahmen der Mathematikdidaktik sind zahlreiche Vorschläge gemacht worden, die Infinitesimalanalysis mit hyperreellen Zahlen so zu elementarisieren, dass damit Studenten und Schüler in die Differenzial- und Integralrechnung eingeführt werden können ([1]–[8]). Dabei lassen sich einige didaktische Schwierigkeiten der Grenzwertanalysis vermeiden. Grundbegriffe, wie die Stetigkeit, lassen sich anschaulicher einführen, da der Unterschied zwischen formaler Definition und intuitiver Vorstellung nicht so groß ist wie in der Grenzwertanalysis. Differenziale werden nicht symbolisch, sondern inhaltlich verwendet. Der sonst benötigte dynamische Grenzwertprozess wird durch das statische Rechnen mit hyperreellen Zahlen ersetzt. Viele Beweise gestalten sich dadurch einfacher. Denn während die Grenzwertanalysis nur absichernden Charakter besitzt, können die Ergebnisse in der Infinitesimalanalysis auf direktem Wege erschlossen werden.

An dieser Stelle soll nun das Konzept einer Unterrichtsreihe vorgestellt werden, das im Rahmen einer Staatsexamensarbeit entwickelt wurde, um Schüler eines Grundkurses mithilfe der Infinitesimalanalysis in die Integralrechnung einzuführen. Die Planung der Reihe orientiert sich dabei an den unter [1] bis [8] dargelegten Vorschlägen. Abschließend sollen die während der Durchführung der Reihe gesammelten Erfahrungen analysiert werden.

1. Das Konzept der Unterrichtsreihe

Am Anfang lernen die Schüler bei der Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung des Inhaltes einer Fläche unter einem Funktionsgraphen mithilfe von infinitesimalen Streifen die Idee der Integralrechnung kennen. Dabei arbeiten sie bereits intuitiv mit infinitesimalen und infiniten Zahlen. Anschließend werden diese neuen Zahlen als Menge der hyperreellen Zahlen axiomatisch eingeführt, und es wird geübt, mit ihnen zu rechnen. Nun sind die Voraussetzungen dafür geschaffen, die Begriffe „Integrierbarkeit", „bestimmtes Integral" und „Flächeninhalt" mithilfe der hyperreellen Zahlen zu definieren. Im weiteren Verlauf können dann die Rechenregeln für bestimmte Integrale und der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen und angewendet werden.

1.1 Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung des Inhaltes einer Fläche unter einem Funktionsgraphen

Das Verfahren wird an einer allgemeinen, im Intervall $[a, b]$ monoton steigenden, beschränkten und positiven Funktion entwickelt, um das Prinzip des Verfahrens in den

Vordergrund stellen zu können. Die Frage nach der Existenz des Flächeninhaltes wird nicht behandelt, da sie sich für die Schüler aufgrund ihrer Anschauung sicher nicht ergibt.

Bei der Entwicklung des Verfahrens müssen die Schüler auf die zentrale Idee der Zerlegung der Fläche in unendlich viele, unendlich schmale Streifen gelenkt werden. Nach einer Idee von H. Wunderling kann dazu der Prozess des Anstreichens der Fläche betrachtet werden. Statt eines Pinsels (Grenzwertanalysis) wird dabei aber eine Rolle verwendet, die ihre Länge genau dem Verlauf des Funktionsgraphen anpassen kann und immer nur auf einem Strich der Fläche aufliegt (Abb. 1). Solch ein Strich an der Stelle z wird dann durch die Unendlichkeitsbrille [1] betrachtet, d. h. unendlich stark vergrößert. Die Schüler können nun ihre Vorstellungen darüber äußern, wie der Strich nach der Vergrößerung aussieht. Ein Hinweis darauf, dass ein unendlich schmaler Streifen zu sehen sein muss, ergibt sich aus der Tatsache, dass andernfalls keine Farbe auf die Fläche gelangen würde.

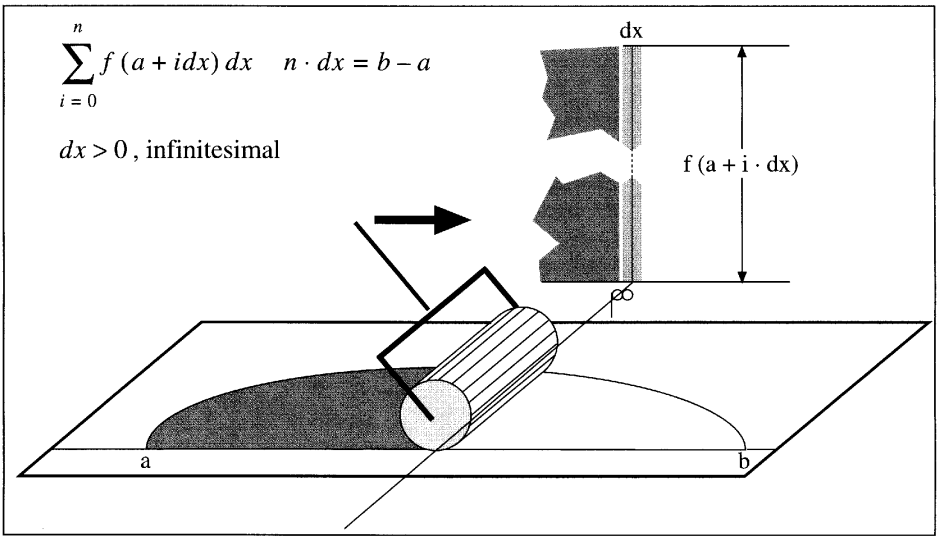


Abb. 1: Zum Integrieren

Durch die unendlich starke Vergrößerung wird die Darstellung der gesamten Fläche erschwert, denn endliche Abstände erscheinen jetzt unendlich groß. Um alles in eine Graphik einzeichnen zu können, wird deshalb mit Punkten gearbeitet, die jeweils eine unendlich große Entfernung andeuten sollen (Abb. 1).

Eigentlich ergibt sich ein weiteres Darstellungsproblem. Denn nach der unendlich starken Vergrößerung sind nur in dx lineare Anteile der Funktionswerte zeichnerisch von einander zu unterscheiden. Quadratische und höhere Anteile werden erst nach einer jeweils weiteren unendlich starken Vergrößerung sichtbar, die allerdings die Streifenbreite unendlich groß werden lässt. Der Funktionsgraph wird aber nach der Vergrößerung trotzdem krummlinig gezeichnet, da sonst die Notwendigkeit der Approximation eines Streifens durch ein Rechteck für die Schüler nur noch schwer einzusehen wäre. Nachdem die graphische Darstellung eines unendlich schmalen Streifens geklärt ist, können die Schüler folgern, dass die gesamte Fläche in unendlich viele, unendlich schmale Streifen zerlegt werden kann (Abb. 1). Der Zusammenhang zwischen der

unendlich großen Anzahl N der Streifen und deren infinitesimaler Breite dx wird dann mit $N \cdot dx = b - a$ angegeben, indem mit den neuen Zahlen genauso gearbeitet wird wie mit den reellen Zahlen.

Die Summe der Flächeninhalte aller infinitesimaler Streifen ergibt den gesuchten Inhalt der gesamten Fläche. Da die Streifen aber krummlinig begrenzt sind, kann ihr Flächeninhalt nur näherungsweise durch die Inhalte von etwas zu großen Rechtecken berechnet werden (Abb. 1). Für den Flächeninhalt A_{str} des ersten Streifens ergibt sich also: $A_{str} < f(a + dx)dx$.

Anhand des Beispiels einer linearen Funktion $f\colon x \to 1/2x,\ x \in [0, 2]$ können die Schüler nun nachprüfen, wie effektiv das entwickelte Näherungsverfahren ist. Dies wird dadurch möglich, dass der Flächeninhalt A_f des Dreiecks, das sich für dieses Beispiel ergibt, auch unabhängig von dem neuen Verfahren exakt berechnet werden kann. Es ergibt sich: $A_f = 1$.

Für die unendliche Summe der Rechteckflächeninhalte erhält man durch Anwendung der Formel für die Summe der hyperreellen Zahlen ($1 + 2 + 3 + \ldots + N = N(N + 1)/2$) dagegen:

$$\sum_{i=1}^{N} f(a + idx)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N} \cdot (1 + 2 + \ldots + N) = 1 + \frac{1}{N}$$

Nun ist zu erkennen, dass der Fehler $\frac{1}{N}$ dieser Approximation des eigentlich gesuchten Flächeninhaltes einen unendlich kleinen Wert besitzt, da N unendlich groß ist. Dies spricht für die Qualität des Verfahrens. Denn dieser unendlich kleine Fehler spielt im Reellen keine Rolle und kann dort deshalb vernachlässigt werden.

1.2 Die hyperreellen Zahlen

Die Schüler haben bisher mit den neuen Zahlen so gerechnet, wie sie mit reellen Zahlen zu rechnen gelernt haben. Anhand der Berechnung der unendlichen Summe für das obige Beispiel einer linearen Funktion können die Schüler nur schrittweise erkennen, was zu fordern ist, damit mit den neuen Zahlen tatsächlich so gearbeitet werden darf, wie sie es bereits getan haben. Es bietet sich deshalb an, die hyperreellen Zahlen axiomatisch einzuführen. Dabei werden die Axiome hinter Forderungen „versteckt", um die Schüler nicht mit diesem Begriff zu belasten. Ferner werden die Forderungen schülergerecht weniger formal als in [5] und auch nicht vollständig formuliert. Aus dem obigen Beispiel lassen sich damit die folgenden Forderungen ableiten:

1) Es gelten für +, -, ·, :, < dieselben Gesetze wie in $\mathbb{R}$.
2) Die Menge $\mathbb{H}$ der hyperrellen Zahlen enthält (mindestens) eine infinitesimale Zahl $w \notin \mathbb{R}$, d. h. eine Zahl, die kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl ist.
3) Funktionen können auf $\mathbb{H}$ erweitert werden.
4) Sätze gelten in $\mathbb{H}$ genau dann, wenn sie in $\mathbb{R}$ gelten.

Die vierte Forderung muss aufgestellt werden, damit die Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen auf hypernatürliche Zahlen übertragen werden kann. Sie stellt eine eigentlich unzulässig grobe Formulierung des Übertragungsprinzips von

Leibniz dar. Denn tatsächlich lassen sich nur Sätze der Prädikatenlogik 1. Stufe übertragen [6]. Die Behandlung dieser Problematik ginge aber über das Niveau und den zeitlichen Rahmen eines Grundkurses hinaus.

Nachdem die obigen Forderungen an die hyperreellen Zahlen gestellt worden sind, können die Schüler nun, ausgehend von der einen infinitesimalen Zahl w, alle Typen hyperreeller Zahlen kennen lernen, d. h. die infinitesimalen Zahlen, die kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl sind (z. B. $2w$, πw, ...), die infiniten Zahlen, die betragsmäßig größer sind als jede reelle Zahl (z. B. $\Omega = 1/w$) und die finiten Zahlen h, die sich eindeutig als Summe aus einem reellen Teil r und einem infinitesimalen Teil a darstellen lassen; also $h = r + \alpha$. Das Ziel beim Kennen lernen der hyperrellen Zahlen muss darin bestehen, dass die Schüler eine anschauliche Vorstellung von diesen Zahlen entwickeln, so dass die graphische Darstellung der Zahlen anhand der hyperreellen Zahlengeraden in den Vordergrund gerückt werden muss ([1], [2]). Die Definition der Zahlentypen erfolgt jeweils am Schluss der Betrachtungen und ergibt sich aus der Anschauung.

Um die infinitesimalen Zahlen graphisch darstellen zu können, muss die hyperreelle Zahlengerade mit der Unendlichkeitsbrille um 0 herum unendlich stark vergrößert werden. Umgekehrt muss eine unendlich starke Verkleinerung stattfinden, wenn die infiniten Zahlen dargestellt werden sollen ([1], [2]). An dieser Stelle werden offen gebliebene Fragen, die bei der unendlich starken Vergrößerung des Striches am Anfang der Reihe (siehe 1.1) aufgetreten sind, beantwortet.

Die infiniten hypernatürlichen Zahlen spielen eine wesentliche Rolle innerhalb der Integralrechnung, denn mit ihnen werden die unendlich vielen Rechtecke abgezählt, die die Fläche unter dem Funktionsgraphen approximieren. Dass solche Zahlen existieren, kann mithilfe des Übertragungsprinzips aus der archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen geschlossen werden [4]. Ob man diesen Beweis exakt führt, sollte allerdings vom Interesse des jeweiligen Grundkurses abhängig gemacht werden.

Das Rechnen mit den hyperreellen Zahlen wird systematisch behandelt, indem in Tabellen [1] alle möglichen Kombinationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von infinitesimalen, reellen und infiniten Zahlen gesammelt werden. Dann lässt sich leicht beurteilen, welcher Zahlentyp sich jeweils bei der Rechnung ergibt (z. B. $r \cdot \alpha$ ist infinitesimal für r reell, α infinitesimal). Im Zusammenhang mit der Integralrechnung kommt dem Produkt $A \cdot \beta$ (A infinit, β infinitesimal) eine besondere Bedeutung zu. Für diesen Fall können sich abhängig von der Größenordnung von A und β verschiedene Zahlentypen ergeben. Ist aber A von derselben Größenordnung infinit (z. B. $A = 2/w$) wie β infinitesimal ist (z. B. $\beta = 3w$), so erhält man ein finites Ergebnis ($(2/w) \cdot 3w = 6$).

Am Ende der Einheit über die hyperreellen Zahlen wird der eindeutig bestimmte reelle Teil RT finiter Zahlen h ausführlich behandelt. Mit $h = r + \alpha$ gilt $RT(h) = r$. Dass der reelle Teil finiter Zahlen für das Lösen reeller Probleme wesentlich ist, haben die Schüler bereits erkannt, als sie die unendliche Summe unter 1.1 berechneten und fest stellten, dass sich das Ergebnis nur durch einen infinitesimalen Fehler $\frac{1}{N}$ von dem tatsächlichen Flächeninhalt unterscheidet.

Lässt man diesen Fehler weg, bleibt der reelle Teil der unendlichen Summe übrig, und man erhält die Lösung des reellen Problems. Das Bilden des reellen Teils entspricht also der Grenzwertbildung. Der große Vorteil liegt aber darin, dass die Schüler hier nur einen infinitesimalen Anteil weglassen müssen, der im Reellen nicht existiert und deshalb nicht interessiert, während sie bei der Grenzwertbildung einen dynamischen Prozess durchführen müssen, dessen tieferen Sinn sie oft nicht verstanden haben.

Analog zu den Grenzwertsätzen können auch für den reellen Teil entsprechende Regeln aufgestellt werden, die sich leicht von den Schülern beweisen lassen [1].

1.3 Integrierbarkeit

Nachdem nun sicher gestellt worden ist, dass mit den hyperreellen Zahlen so gearbeitet werden kann wie mit den reellen Zahlen, wird wieder zum eigentlichen Problem der Flächeninhaltsberechnung zurückgekehrt. Anhand der Wiederholung des Einstiegsbeispiels (siehe 1.1) können die Schüler nun erarbeiten, dass sich das Problem einer Flächeninhaltsberechnung nach folgender Systematik lösen lässt:

1) Das reelle Problem (Flächeninhalt $A_f = ?$) wird ins Hyperreelle übertragen; also: Zerlegung der Flächen in unendlich viele Streifen.
2) Das Problem wird im Hyperreellen gelöst; also: Berechnung der unendlichen Summe
$$\sum_{i=1}^{N} f(a+idx)\,dx \;=\; 1+\frac{1}{N}).$$
3) Der reelle Teil der hyperreellen Lösung liefert die Lösung des reellen Problems $A_f = RT\left(1+\frac{1}{N}\right) = 1$. Die Eindeutigkeit bei der Rückkehr ins Reelle ist dabei für das Verfahren entscheidend.

Die Verallgemeinerung dieses Beispiels führt zur Definition der Integrierbarkeit:

Definition (Integrierbarkeit):

Eine auf $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ definierte Funktion f heißt integrierbar über $[a, b]$ genau dann, wenn für alle infinitesimalen dx $(dx > 0)$ die unendlichen Summen

$$\sum_{i=1}^{N} f(a+idx)\,dx \qquad \text{mit } b-a = N\cdot dx \text{ (N infinit, hypernatürlich) alle denselben}$$

reellen Teil besitzen.

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; RT\left(\sum_{i=1}^{N} f(a+idx)\,dx\right)$$

heißt dann bestimmtes Integral von f über $[a, b]$. Für positive Funktionen soll der Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen im Intervall $[a, b]$ gerade dem Wert des bestimmten Integrals entsprechen.

In der obigen Definition werden vereinfachend nur äquidistante, unendlich feine Zerlegungen des Intervalls ohne Rest berücksichtigt. Dass dann gar nicht alle infinitesimalen $dx > 0$ möglich sind, wird nicht problematisiert. Die Schüler können aber grundsätzlich einsehen, dass die Definition nur sinnvoll ist, wenn die verschiedenen unendlichen Summen, die sich für die unterschiedlichen $dx > 0$ ergeben, denselben reellen Teil besitzen, denn das Ergebnis für den Flächeninhalt sollte nicht von der speziell gewählten Intervallzerlegung abhängen.

Anschließend wird geklärt, welche Funktionstypen integrierbar sind. Hier kann man sich auf stetige Funktionen beschränken. Die Definition der Stetigkeit wird dabei einfach aus der Vorstellung abgeleitet, dass der Graph einer stetigen Funktion in einem Zug durchgezeichnet werden kann. Ein „infinitesimales Wackeln" an den x-Werten bewirkt dann nur ein „infinitesimales Wackeln" an den $f(x)$-Werten.

Definition (Stetigkeit):

Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $r \in D_f$ genau dann, wenn für jedes hyperreelle h, das unendlich benachbart zu r liegt, gilt, dass $f(h)$ unendlich benachbart zu $f(r)$ liegt.

(Unendlich benachbart heißen die zwei Zahlen h und r genau dann, wenn ihre Differenz infinitesimal ist. Man schreibt: $h \sim r$.)

Um zu zeigen, dass stetige Funktionen integrierbar sind, wird dann über eine Abschätzung erkannt, dass die unendlichen Summen für stetige Funktionen finit sind. Dabei können die Schüler die Tatsache, dass stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall ein Minimum und ein Maximum annehmen, der geometrischen Anschauung entnehmen, da der Beweis dieser Eigenschaft über das Niveau eines Grundkurses hinaus ginge.

Die Unabhängigkeit des reellen Teils der unendlichen Summen von $dx > 0$ wird nicht bewiesen, da hierzu zwei Treppenfunktionen miteinander verglichen werden müssten [4], was eine Überforderung der Schüler wäre.

1.4 Rechenregeln für bestimmte Integrale

Die Regeln können von den Schülern anhand der Betrachtung von Flächen unter Funktionsgraphen aus der geometrischen Anschauung abgeleitet werden. Anschließend ist der Beweis der Regeln mithilfe der Definition des bestimmten Integrals und der Rechenregeln für den reellen Teil durch „Ausrechnen" möglich.

Beispiel: Summenregel

Satz:
Für auf $[a, b]$ stetige Funktionen f und g gilt:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .$$

Beweis:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) = RT\left(\sum_{i=1}^{N} f(a+idx) + g(a+idx)\,dx\right)$$

$$= RT\left(\sum_{i=1}^{N} f(a+idx)\,dx + \sum_{i=1}^{N} g(a+idx)\,dx\right)$$

$$= RT\left(\sum_{i=1}^{N} f(a+idx)\,dx\right) + RT\left(\sum_{i=1}^{N} g(a+idx)\,dx\right)$$

$$= RT \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

1.5 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Da in der Literatur unterschiedliche Varianten des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung zu finden sind, wird kurz wiedergegeben, was hier unter diesem Satz verstanden werden soll.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$.

a) Dann ist die Integralfunktion I_a von f mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar auf $[a, b]$, und es gilt:

$I'_a(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, d. h. I_a ist eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

b) Ist F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Der Hauptsatz wird mit den Schülern in folgenden Teilschritten erarbeitet:

1) Information über das Ziel: Es soll eine Möglichkeit gefunden werden, bestimmte Integrale einfacher als über ihre Definition zu berechnen.

2) Einführung der Integralfunktion I_a zur unteren Grenze a für stetige Funktionen und Ableitung der Eigenschaft dieser Funktion ($I_a(a) = 0$ und $\int_{-b}^{c} f(t)\,dt = I_a(c) - I_a(b)$) aus der graphischen Anschauung.

3) Berechnung der Integralfunktionen zur unteren Grenze 0 für verschiedene Integranden $f(x)$ mithilfe der Definition des bestimmten Integrals, Vermutung: $I'_a(x) = f(x)$.

4) Wiederholung der Definition der Ableitung über den Grenzwert, die die Schüler bereits aus der 11. Klasse kennen. Dann Erarbeitung der Definition der Ableitung über den reellen Teil:

Definition (Ableitung):

Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D_f$ genau dann, wenn für alle infinitesimalen dx ($dx \neq 0$) die Differenzialquotienten

$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$ alle denselben reellen Teil besitzen.

$f'(x_0) := RT\left(\frac{df}{dx}\right)$ heißt dann Ableitung von f an der Stelle x_0.

Dabei wird der Sachverhalt wieder graphisch dargestellt ([1], [3]). Den Schülern wird an dieser Stelle bewusst, dass das Bilden des reellen Teils dem Bilden des Grenzwertes entspricht.

5) Beweis von Teil a) des Hauptsatzes:

Es wird nun der Fall $dx > 0, f(x) > 0$ betrachtet. Die Beweisidee ist aus [4] entnommen. Zunächst werden die Schüler dazu angeleitet, die Behauptung mithilfe der Definition der Ableitung umzuschreiben. Zu zeigen ist also:

$$RT\left(\frac{I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0)}{dx}\right) = f(x_0) \quad \text{für alle } dx > 0.$$

Nun wird die Differenz $I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0)$ mithilfe des Vorwissens der Schüler als Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[x_0, x_0 + dx]$ gedeutet (siehe Abb. 2):

$$I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0) = \int_a^{(x_0 + dx)} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{(x_0 + dx)} f(t)\,dt$$

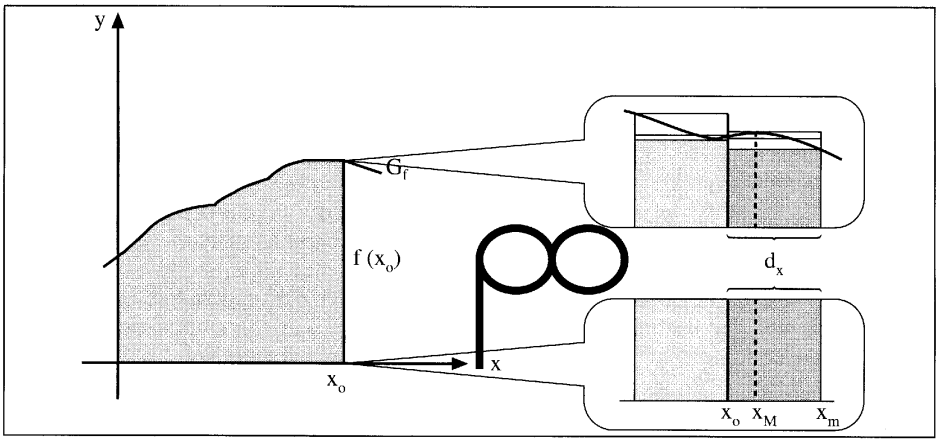


Abb. 2: Zum Hauptsatz

Dieser Flächeninhalt wird wieder abgeschätzt. Dass die stetige Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall ein Minimum $f(x_m)$ und ein Maximum annimmt, kann dabei wieder der Anschauuung entnommen werden.

Es gilt: $f(x_m)\,dx \le I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0) \le f(x_M)\,dx$

Nun wird die Abschätzung so umgeformt, dass sie mit der Behauptung vergleichbar wird. Dividieren durch $dx > 0$ *ergibt:*

$$f(x_m) \le \frac{I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0)}{dx} \le f(x_M)$$

Wegen $x_m \sim x_M \sim x_0$ und f stetig gilt: $f(x_m) \sim f(x_M) \sim f(x_0)$

Damit folgt aus der Abschätzung:

$$\frac{I_a(x_0 + dx) - I_a(x_0)}{dx} \sim f(x_0)$$

Durch das Bilden des reellen Teils ergibt sich die Behauptung.

6) Behandlung der Stammfunktionen.

7) Beweis von Teil b) des Hauptsatzes.

2. Analyse der Unterrichtsreihe

Um eine umfassende Analyse der Unterrichtsreihe durchführen zu können, wurden auf verschiedenen Wegen Informationen darüber eingeholt, wie die Schüler mit den über die Infinitesimalanalysis vermittelten Lerninhalten zurecht gekommen sind. Das Unterrichtsgeschehen wurde notiert, am Ende der Reihe wurde eine Lernerfolgskontrolle durchgeführt, und die Schüler wurden gebeten, in Form einer schriftlichen Stellungnahme Kritik zu üben.

Insgesamt hat die Analyse der Reihe die in der Einleitung genannten didaktischen Vorteile der Infinitesimalanalysis bestätigt. Das Interesse der Schüler an den hyperreellen Zahlen war sehr groß, was aus der hohen Beteiligung und der positiven Schülerkritik abzulesen war. Außerdem hat sich ergeben, dass die Schüler sehr gut mit infini-

tesimalen und infiniten Zahlen argumentieren konnten. Am Beispiel der Stetigkeit wurde deutlich, dass Definitionen innerhalb der Infinitesimalanalysis so anschaulich sind, dass sie von Schülern selbst „entdeckt" werden können. Auch das Bilden des reellen Teils war für die Schüler als Übergang von der hyperreellen zur reellen Lösung ein klar durchschaubarer Vorgang.

Die graphische Darstellung der hyperreellen Zahlen und des Verfahrens zur Flächeninhaltsberechnung durch unendlich starke Vergrößerung oder Verkleinerung war als anschauliches Hilfsmittel sehr geeignet und hatte für die Schüler ein hohes Motivationspotenzial. Bei dieser graphischen Methode sind aber so viele Details von Interesse, dass es den zeitlichen Rahmen des Grundkurses gesprengt hätte, wenn man auf alle Einzelheiten eingegangen wäre. Bei der Einführung in die Differenzialrechnung in der 11. Klasse bietet der Rahmenplan mehr Freiraum für solche eigentlich notwendigen detaillierten Betrachtungen. Außerdem könnten hier die hyperreellen Zahlen bei der Behandlung von Folgen als Äquivalenzklassen reeller Zahlenfolgen sehr anschaulich und zunächst unabhängig von anderen inhaltlichen Problemen eingeführt werden ([1], [2]). Dies hätte den Vorteil, dass die Schüler eine anschauliche Vorstellung von den neuen Zahlen bekämen, die ihnen in der vorliegenden Unterrichtsreihe tatsächlich fehlte. Denn hier wurden die hyperreellen Zahlen axiomatisch eingeführt, so dass nur mit abstrakten Symbolen gerechnet werden konnte.

Behandelt man die hyperreellen Zahlen bereits in der 11. Klasse, ergibt sich als weiterer Vorteil, dass auch die Differenzialrechnung mit den Methoden der Infinitesimalanalysis unterrichtet werden kann ([1], [3]), so dass kein Konzeptwechsel erfolgen muss. Dies wäre günstig, da die Analyse gezeigt hat, dass es insbesondere leistungsstarken Schülern, die sich noch an Grenzwertberechnungen erinnern, schwer fällt, das neue Konzept anzunehmen. Außerdem hemmt der von der Grenzwertanalysis unterstützte pauschale Begriff der Unendlichkeit die Akzeptanz der Existenz von mehreren Größenordnungen von unendlich groß und unendlich klein.

Ferner muss darauf hingewiesen werden, dass Schüler, die die z. B. in der Physik oft verwendete Schreibweise $f'(x_0) := \frac{df}{dx}$ kennen gelernt haben, diese nicht mit der Definition der Ableitung $f'(x_0) := RT\left(\frac{df}{dx}\right)$ in der Infinitesimalmathematik verwechseln dürfen.

Abschließend kann gesagt werden, dass die Methoden der Infinitesimalanalysis eine für Schüler sehr interessante und motivierende Alternative zur Grenzwertanalysis darstellen. Es sollte aber konsequent bereits in der 11. Klasse mit diesem Konzept in die Differenzialrechnung eingeführt werden.

Literatur

[1] Baumann, P.; B. Steinig; H. Wunderling: Differentialrechnung mit hyperreellen Zahlen, Teil 1 und 2. In: PM, Jahrg. 1995, Heft 2 u. 3, 65–74 u. 115–119.

[2] Baumann, P.; B. Steinig, H. Wunderling: Hyperreelle Zahlen. In: Mathematik betrifft uns, Jahrg. 1995, Heft 2.

[3] Baumann, P.; B. Steinig, H. Wunderling: Differentialrechnung mit hyperreellen Zahlen. In: Mathematik betrifft uns, Jahrg. 1996, Heft 4.

[4] Henle, J. M.; E. M. Kleinberg: Infinitesimal Calculus. Cambridge, Massachusetts and London 1979.

[5] Keisler, H. J.: Foundations of Infinitesimal Calculus. Boston, Massachusetts 1976.

[6] Laugwitz, D.: Zahlen und Kontinuum. Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik. Mannheim, Wien, Zürich 1986.

[7] Schnitzspan, W.: Nichtstandard-Analysis in der Schule. In: MU, Jahrg. 29, Heft 4 (1983), 37–59.

[8] Wattenberg, F.: Unterricht im Infinitesimalkalkül: Erfahrungen aus den USA. In: MU, Jahrg. 29, Heft 4 (1983), 7–36.

Einführung der Analysis über hyperreelle Zahlen

Ein Erfahrungsbericht

von Peter Baumann

1. Grundlagen über Funktionen und Folgen

Der Berliner Rahmenplan sieht zu Beginn der 11. Klasse an gymnasialen Oberstufen vor, Funktionen ohne Differenzialrechnung zu untersuchen. Dazu gehört zunächst die präzise Behandlung grundlegender Begriffe wie Zuordnung, Funktion, Definitions- und Wertemenge, bevor lineare Funktionen und ihre Graphen, Steigung und Steigungswinkel sowie Achsenschnittpunkte systematisch untersucht werden. Es folgen Potenz-, Kehrwert- und Winkelfunktionen, bei deren Behandlung Symmetrieuntersuchungen hinzukommen. Bei Nullstellenberechnungen ganz rationaler Funktionen lernen und üben die Schüler die einschlägigen algebraischen Rechenverfahren.

Es folgt der Abschnitt über Folgen. Die Schüler lernen zunächst arithmetische und geometrische Folgen kennen. Sie stellen Bildungsgesetze auf, werden vertraut mit Begriffen wie Monotonie und Beschränktheit und rechnen schließlich anwendungsbezogen wie z. B. bei der Zinseszinsrechnung.

Laut Rahmenplan soll der Lehrer nun konvergente Folgen behandeln und die Schüler zum Grenzwertbegriff führen, damit sie dann „Grenzwert-Analysis" betreiben können. In meinem Unterrichtsgang blieben zwar ebenfalls die Folgen Thema, sie wurden aber unter dem Aspekt, mit ihnen Zahlen zu beschreiben, beleuchtet. Dieser Weg führte zur Definition hyperreller Zahlen, die ihrerseits den Weg ebneten für die Differenzial- und Integralrechnung. Dieser vom Gewohnten abweichende Weg zur Analysis soll im Folgenden genauer beschrieben werden. Um den Vergleich mit dem „klassischen" Weg bereits jetzt zu ziehen: Ich bin überzeugt, dass dieser Weg eine Abkürzung ist, die sogar den Blick für Neues freigibt.

2. Die Erweiterung des reellen Zahlenkörpers

2.1 Motivierung einer Erweiterung von $\mathbb{R}$

Zunächst wollte ich den Schülern deutlich machen, dass es zwischen Folgen und Zahlen Zusammenhänge gibt. Ich stellte ihnen daher die Frage, ob sie sich noch an die Berechnung von $\sqrt{2}$ erinnerten. Natürlich war den Schülern klar, was mit $\sqrt{2}$ gemeint ist, jedoch war einigen nicht mehr geläufig, dass das, was ein Taschenrechner bei der Eingabe von $\sqrt{2}$ ausgibt, nur ein Näherungswert ist. Das Besondere irrationaler Zahlen und ihrer rationalen Näherungswerte wurde somit auf einem um zwei Jahre höheren Entwicklungsstand der Schüler wiederholt.

Gleichzeitig bereitete diese Wiederholung die Zahlbereichserweiterung vor, denn jeder Schritt der Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ wurde zu einem Glied für eine unendliche Folge rationaler Zahlen, die wiederum eine Beschreibung für die Zahl $\sqrt{2}$ ist. Dabei ist die Folge (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...) nur eine von vielen Möglichkeiten.

Dem „Eingeweihten“ ist natürlich klar, dass hier der Grenzwert durch eine entsprechende konvergente Folge ersetzt wurde. Dies hätte neben jeder anderen Wurzel auch alternativ mit der Einschachtelung von π über regelmäßige Tangenten- und Sehnenvielecke geschehen können. Die Wurzeln sind aber wegen geringeren Rechenaufwands zeitökonomischer. Außerdem ist es für den weiteren Unterrichtsgang vorteilhafter, mit den Dezimalfolgen zu arbeiten, die bei der Betrachtung von $\sqrt{2}$ am Taschenrechner schnell entstehen.

Es tauchte natürlich die Frage auf, ob auch rationale Zahlen durch Folgen von Dezimalzahlen beschrieben werden können. Auf Brüche wie $\frac{1}{3}$ oder $\frac{3}{7}$, die also periodische Dezimalbrüche ergeben, kamen die Schüler recht schnell und gaben die Folgen (0, 3; 0,33; 0,333; ...) bzw. (0,4; 0,42; 0,428; ...) an. Ganze Zahlen durch Dezimalfolgen zu ersetzen, betrachteten sie zwar als ziemlich aufwendig, aber es passte in die Systematik, denn bereits bei abbrechenden Dezimalbrüchen hatten sie Folgen akzeptiert, bei denen ab einem bestimmten Folgenglied nur noch Nullen hinzu kamen.

Dezimalfolgen für Zahlen zu verwenden, musste natürlich auch für die Schüler einen Sinn haben. Dies konnte mit der Notwendigkeit begründet werden, dass man in der Lage sein muß, Zahlen miteinander zu vergleichen. Größenvergleiche sind aber in vielen Fällen nur über Folgen möglich. Von π und $\sqrt{10}$ z. B. kann man, wenn man diese Zahlen symbolisch schreibt, nicht sagen, welche Zahl die größere ist. Erst der Vergleich zugehöriger Dezimalfolgen löst das Problem. Beide Zahlen stimmen nämlich im ersten Folgenglied überein, erst ab dem zweiten besitzt die Folge für $\sqrt{10}$ größere Werte, so dass damit der Größenvergleich entschieden ist.

Da der Größenvergleich gliedweise über die Folgen geschieht, sollte das Entsprechende auch für das Rechnen gelten. Addiert man z. B. zwei Zahlen, so hat man die Folgen gliedweise zu addieren, damit sich die Summenfolge als Beschreibung der Summe ergibt. Das funktioniert mit allen Grundrechenarten, allerdings sollte der Lehrer bei der Multiplikation zunächst seine Beispiele geeignet auswählen, damit die Anzahl der Dezimalstellen von Faktoren und Produkt beim jeweiligen Index übereinstimmt. Aber selbst dann, wenn Schüler das Problem der Stellenzahl aufwerfen, kann man jedes Folgenglied generell auf die Stellenzahl abrunden, die seinem Index entspricht. Auch diese Folge beschreibt das Produkt der Zahlen, was die Schüler natürlich einsahen.

Anhand der Multiplikation von 9 und $\frac{1}{9}$ wurde den Schülern die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ nahe gebracht. Es entstand für die Schüler der kognitive Konflikt, dass das Produkt dieser beiden Zahlen 1 ergibt, wofür die Folge (1,0; 1,00; 1,000; ...) zu schreiben ist, dass jedoch bei der gliedweisen Multiplikation der zugehörigen Folgen (9,0; 9,00; 9,000; ...) und (0,1; 0,11; 0,111; ...) die Produktfolge (0,9; 0,99; 0,999; ...) entsteht. Es entstanden also für dasselbe Ergebnis zwei verschiedene Folgen, deren Unterschied die Folge (0,1; 0,01; 0,001; ...) beschreibt.

Aus dieser Situation war ein Ausweg zu suchen. Zunächst sahen die Schüler sofort, was es mit der Differenzfolge auf sich hat. Von Folgenglied zu Folgenglied kommt immer eine weitere Null vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer hinzu. Sie nannten sie deshalb eine Nullfolge. Außerdem erkannten sie, dass bei einem Vergleich dieser Folge mit derjenigen irgendeiner positiven Zahl stets die zweite größer ist. Man findet nämlich immer ein Folgenglied, ab dem alle weiteren Folgenglieder der positiven Zahl größer sind.

Den Ausweg musste aber weitgehend der Lehrer weisen. Das geschah zum einen mit dem Hinweis, dass die meisten Taschenrechner aufgrund ihrer Rundungsautomatik keinen Unterschied zwischen 0,999999999 und 1,000000000 machen und bei der Multiplikation $9 \cdot \frac{1}{9}$ die Zahl 1,000000000 ausgeben. Zum zweiten entspricht das auch der

Theorie der reellen Zahlen; bei ihr werden beide Folgen als zwei Repräsentanten derselben Zahl, nämlich der reellen 1 gesehen.

Eine dritte Möglichkeit wäre aber, den unterschiedlichen Informationsgehalt beider Folgen auch zu bewahren und sie als Repräsentanten zweier verschiedener Zahlen zu betrachten. Die konstante Folge (1, 0; 1, 00; 1, 000; ...) stünde dann für die reelle 1 und die Folge (0, 9; 0, 99; 0, 999; ...) für eine weitere Zahl, die nicht reell, sondern hyperreell ist. Auch die Differenzfolge (0, 1; 0, 01; 0, 001; ...) wäre dann eine eigene hyperreelle Zahl *d*.

2.2 Die neue Zahlenmenge $\mathbb{H}$

Für die Schüler war diese Einführung der hyperreellen Zahlen einsichtig. Insbesondere wird dies durch die Differenzfolge sinnfällig; es ist eben ein Unterschied sichtbar, auch wenn er kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

Die Schüler sahen zunächst nicht das Problem, das sich ergibt, wenn man konstante Folgen als Kennzeichen reeller Zahlen heranzieht. Dann kann nämlich die ursprüngliche Folge (0,1; 0,11; 0,111; ...) nicht die reelle Zahl $\frac{1}{9}$ repräsentieren. Dieses kann nur die Folge $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \ldots\right)$, auch wenn man damit das Prinzip der Dezimalfolgen wieder verlässt, mit denen die Zahlbereichserweiterung ursprünglich motiviert wurde.

Die Diskussion mit den Schülern machte deutlich, dass hierin eine Schwierigkeit liegt. Dennoch wurde den Schülern klar, dass in der neuen Zahlenmenge $\mathbb{H}$ verschiedene Folgen auch verschiedene hyperreelle Zahlen beschreiben, die in der kleineren Menge $\mathbb{R}$ für dieselbe reelle Zahl stehen. Dem Problem ist aber methodisch kaum auszuweichen, da die Motivation, den Zahlbereich $\mathbb{R}$ zu erweitern, durch ein geeignetes Beispiel in der den Schülern vertrauten Menge $\mathbb{R}$ erfolgen muss. Andererseits ist es natürlich positiv und für Schüler wichtig zu lernen, das ursprüngliche Problem aus dieser Perspektive neu zu beleuchten, und dabei festzustellen, dass man es neu bewerten muss. Nicht vertieft wurde an dieser Stelle, dass es für eine hyperreelle Zahl durchaus auch verschiedene beschreibende Folgen gibt, die aber bei „genügend vielen" Indizes übereinstimmen müssen.

Die Darlegungen des letzten Absatzes haben auch Konsequenzen auf ein anderes Einführungsbeispiel. Bei den Produktfolgen nämlich, die durch gliedweise Multiplikation der Faktorenfolgen entstehen, empfahl ich aus didaktischen Gründen, ggf. so viele Dezimalstellen abzuschneiden, bis die Anzahl der Stellen hinter dem Komma mit dem jeweiligen Index des Folgenglieds übereinstimmt. Dies ist natürlich nur in der Menge $\mathbb{R}$ erlaubt, da bei dieser Maßnahme der Grenzwert der Folge erhalten bleibt und somit dieselbe reelle Zahl beschrieben wird. In der Menge $\mathbb{H}$ dagegen beschreibt die durch Abschneiden der Dezimalen entstandene Folge eine andere Zahl als die ursprüngliche. Der Abstand dieser beiden Zahlen ist natürlich kleiner als jede positive reelle Zahl (bzw. größer als jede negative reelle Zahl).

Es bleibt noch, den Schülern die Begriffe zu vermitteln. Die Zahl *d* sollte eine sog. infinitesimale, also betragsmäßig unendlich kleine Zahl sein. Da sie den Unterschied zwischen den beiden hyperreellen Zahlen beschreibt, sahen die Schüler auch, dass die beiden Zahlen, repräsentiert durch die Folgen (1; 1; 1; ...) und (0,9; 0,99; 0,999; ...), infinitesimal benachbart sind.

Weitere Beispiele infinitesimaler Nachbarn der 1 = (1; 1; 1; ...) fanden die Schüler nun selbst, wie z. B. (0,8; 0,98; 0,998; ...) oder (1,1; 1,01; 1,001; ...). Sie begründeten dies mit den Differenzenfolgen und erhielten damit gleichzeitig weitere infinitesimale Zahlen. Sie erkannten auf diese Weise, dass jede reelle Zahl von lauter infinitesimalen

Nachbarn umgeben ist und dass es auch unendlich viele infinitesimale Zahlen in der Nachbarschaft der Null gibt. Die Besonderheit der Null als einziger reeller Zahl, die zugleich infinitesimal ist, erkannten sie auch sofort, denn sie ist kleiner als jede positive reelle Zahl, größer als jede negative reelle Zahl und die zugehörige Folge (0; 0; 0; ...) ist konstant.

Ich schildere diese Einführung so ausführlich, um deutlich zu machen, dass das Thema Folgen bruchlos zu den hyperrellen Zahlen führt. Dies ist für Schüler besonders wichtig, die einen sinnfälligen Unterrichtsaufbau benötigen. Auch wenn Grenzbetrachtungen nun „außen vor" bleiben, ist das wichtige Thema Folgen nicht unter den Tisch gefallen und somit bei den Schülern verankert. In Bezug auf die irrationalen Zahlen fand sogar eine Vertiefung statt. Die Behandlung unendlicher Reihen ist nur verschoben, denn auch sie lassen sich mit hyperreellen Zahlen leichter untersuchen.

2.3 Die neuen Zahlen und ihre Veranschaulichung

Der nächste Schritt bestand nun darin, herauszufinden, wie man die neuen Zahlen auf der Zahlengeraden findet, denn sie sind ja zu den reellen Zahlen hinzugekommen. Ich fragte die Schüler, wo sie denn die infinitesimalen Zahlen suchen würden. „Bei der Null, aber unendlich dicht daneben", war die schnelle Antwort. Sie schlugen dann vor, einen größeren Maßstab zu wählen. Die Diskussion um den Vergrößerungsmaßstab brachte die Schüler darauf, dass eine endliche Vergrößerung nicht ausreicht, man müsse unendlich stark vergrößern. Sie fanden auch heraus, dass dann die Zahl Null die einzige reelle Zahl ist, die man überhaupt noch zeichnen kann, alle anderen reellen Zahlen sind durch die Vergrößerung unendlich weit weggerückt. Sie verstanden damit auch das Besondere am Symbol der Unendlichkeitsbrille.

Die Übertragung, dass die Vergrößerung an jedem anderen Punkt der Zahlengeraden zu entsprechenden Ergebnissen führt, fiel den Schülern leicht. Die infinitesimalen Nachbarn jeder reellen Zahl würden nur durch diese Vergrößerung sichtbar.

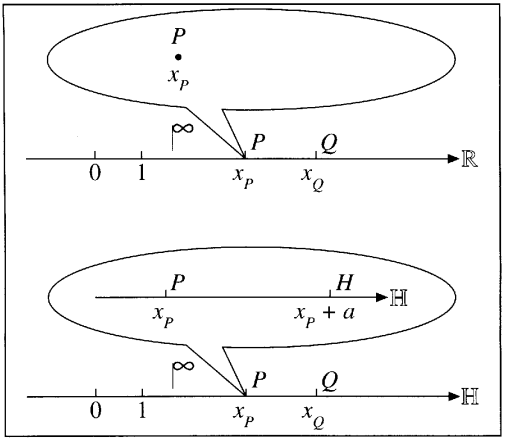


Abb. 1: Vergrößerung der reellen Zahlengeraden (oben) und der hyperreellen Zahlengeraden (unten) jeweils mit einem unendlich großen Faktor

Hier war von Bedeutung, die Wichtigkeit der Achsenbezeichnung zu betonen. Würde man nämlich nicht die hyperreelle Zahlengerade, sondern die reelle mit einem unendlichen Faktor vergrößern, so ergäbe das vergrößerte Bild nur den Punkt, an dem vergrößert wurde. Durch diese Problematisierung wurde aber den Schülern auch anschaulich klar, dass die hyperreellen Zahlen zusätzliche Zahlen sind. Ihren Abstand zum reellen Nachbarn mit kleinen griechischen Buchstaben zu bezeichnen, war eine Lehrervorgabe, die das Besondere der infinitesimalen Zahlen betonte und von den Schülern eingesehen wurde. Dies zeigt Abbildung 1.

Damit war die übliche Bezeichnungsweise infinitesimaler Zahlen eingeführt. Gleichzeitig war damit die Zusammensetzung der neuen hyperreellen Zahlen aus reellem und infinitesimalem Anteil vorbereitet. An dieser Stelle hätte der reelle Teil auch

direkt eingeführt werden können, da seine Existenz hier sinnfällig ist. Deswegen kann sich der Beweis auch auf die Eindeutigkeit beschränken. Existenzbeweise zu führen, fällt den Schülern schon aus psychologischen Gründen schwer und wird deswegen in der Regel ausgespart.

Die Angabe, eine unendliche Vergrößerung vornehmen zu müssen, war bei den Schülern noch auf Intuition gegründet, da das unendlich Große noch nicht quantifiziert war. Ich halte es aber nach wie vor für richtig, der Definition der infinitesimalen Zahlen auch gleich die Veranschaulichung folgen zu lassen. Immerhin „lebt" die Schulmathematik – und nicht nur sie – wesentlich von optischer Veranschaulichung. Gleichzeitig gibt die Intuition der Schüler dem Lehrer aber auch die Möglichkeit, auf diese „noch nicht entdeckte" Teilmenge von $\mathbb{H}$ hinzuweisen.

2.4 Unendlich große Zahlen und ihre Veranschaulichung

Hyperreelle Zahlen sind ausschließlich über die sie beschreibenden Folgen erklärt. Das war den Schülern neu, denn bei reellen Zahlen standen ihnen noch geeignete Symbole zur Verfügung (Wurzelzeichen, log, sin usw.). Die Folgenschreibweise hyperreeller Zahlen lässt aber Rechenoperationen in der Menge $\mathbb{H}$ zu, denn durch Anwendung der Rechengesetze in $\mathbb{R}$ auf die einzelnen Folgenglieder werden die entsprechenden Operationen in $\mathbb{H}$ vollzogen. Dies hatten die Schüler am Anfang dieser Unterrichtssequenz, wenn auch noch nicht bezogen auf die seinerzeit unbekannte Menge $\mathbb{H}$, kennengelernt. Diese Kenntnis übertrugen sie auf die neuen infinitesimalen Zahlen; die Schüler rechneten mit den hyperrellen Zahlen, indem sie die reellen Rechengesetze auf die reellen Folgenglieder der die hyperreellen Zahlen beschreibenden Folgen anwandten.

Die Kehrtwertbildung einer Infinitesimalzahl führte die Schüler aber schnell zu weitern, noch nicht erklärten, hyperreellen Zahlen. Ich stellte den Schülern die Zahl $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots)$ vor, die sie als Infinitesimalzahl erkannten. Dies erforderte eine griechische Bezeichnung, und ich gab ihr den Namen ω. Die Aufforderung, den Kehrwert dieser Zahl zu bestimmen, brachte die Schüler auf die Folge $(1; 2; 3; 4; 5; \ldots)$.

Da sie nicht konstant war, musste diese Folge ebenfalls eine hyperreelle Zahl beschreiben, die nicht gleichzeitig reell war. Die Schüler erkannten, dass ihr Wert größer als der jeder reellen Zahl sein muss, was sie ähnlich wie bei der Zahl d begründeten. Gleichgültig, welche reelle Zahl man zum Vergleich heranzöge, würde es immer ein Folgenglied geben, ab dem alle weiteren Folgenglieder dieser Kehrwertszahl größer sind. Zur Verdeutlichung der Reziprozität wurde diese Zahl einvernehmlich Ω genannt.

Auch hier setzte ich für diese weiteren hyperreellen Zahlen die Bezeichnung, nämlich „infinite Zahlen". Im Gegensatz zu den infinitesimalen sind diese unendlich groß. Zugute kam dem Unterricht an dieser Stelle, dass die Schüler des Lateinischen nicht mächtig waren, denn infinit und infinitesimal sind in der Bedeutung sehr ähnlich („unbegrenzt" bzw. „unendlich klein"). Dass man die nicht infiniten Zahlen „finit" nennen sollte, fanden die Schüler dann selbst. Angesprochen werden musste an dieser Stelle aber auch, dass die infinitesimalen Zahlen auch zu den finiten gehören. „Infinit", „finit" und „infinitesimal" bezeichnen also keineswegs disjunkte Zahlenmengen.

Die Lage der Zahl Ω auf der Zahlengeraden fanden die Schüler ebenfalls schnell. Da der Wert der Zahl unendlich groß ist, muss sie auch im Unendlichen zu finden sein. Da die Schüler die Unendlichkeitsbrille bereits kannten, kam auch bald der Vorschlag, sie „umzudrehen", die Zahlengerade also unendlich stark zu verkleinern.

Spätestens hier sollte die Sprechweise eindeutig werden. Es erwies sich als ungünstig, dass das deutsche Wort „unendlich" sowohl das Große als auch das Kleine ausdrücken kann. Die letzte Maßstabsveränderung der Zahlengeraden sollte man als

„Verkleinerung mit einem infinitesimalen Faktor“ bezeichnen. Dementsprechend werden infinitesimale Größenordnungen durch „Vergrößerung mit einem infiniten Faktor“ sichtbar.

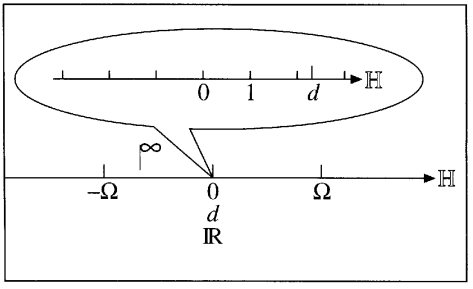


Abb. 2: Graphische Veranschaulichung infiniter Zahlen durch Verkleinerung mit einem infinitesimalen Faktor

Ein kleines Problem war die Lage der reellen Zahlen auf der verkleinerten Zahlengeraden. Im Unterrichtsgespräch wurde heraus gearbeitet, dass im Unterschied zu Ω jede noch so große reelle Zahl endlich ist. Ihr Abstand von der Null kann also bei Verkleinerung mit infinitesimalem Faktor nicht mehr zeichenbar sein. Folglich zeichneten sie ganz ℝ als einen Punkt. Vermutlich aus Symmetriegründen war es aus ihrer Sicht der Nullpunkt. Dass dort auch jede andere reelle Bezeichnung richtig wäre, wurde nicht weiter thematisiert. Die Veranschaulichung infiniter Zahlen zeigt Abbildung 2.

2.5 Übertragung der Rechengesetze von ℝ nach ℍ

Für die Differenzialrechnung ist es nicht notwendig, mit konkreten hyperreellen Zahlen zu rechnen. Dagegen ist es wichtig, über die Verknüpfung hyperreller Zahlen die Aussage treffen zu können, zu welchen der genannten Teilmengen ein Rechenergebnis gehört. Eine leichte Erschwernis ist es, dass diese Teilmengen nicht disjunkt sind.

Mit den Schülern wurden also die Verknüpfungstabellen erstellt, was eine gewisse Zeit erforderte. Da aber für jede Grundrechenart eine eigene Tabelle zu erstellen war, konnten unterschiedliche Arbeitsformen angewandt werden. Ebenso bot sich an, die Vervollständigung als Hausaufgabe zu stellen.

Den Schülern fiel die Erstellung in den eindeutigen Fällen leicht. Dort, wo die Zuordnung nur bei genauerer Kenntnis der zu verknüpfenden Zahlen möglich war (z. B. bei der Multiplikation „infinit“ mal „infinitesimal“), kamen die Schüler mit Lehrerhilfe zu dem für sie überraschenden Ergebnis, dass es offenbar verschiedene Grade von Unendlichkeit gibt. Diese Erkenntnis war für die spätere Beurteilung der Differenzierbarkeit wichtig. Als Beispiel sei die Zahl Ω^2 betrachtet, die wie Ω ebenfalls infinit ist. Multipliziert man Ω mit ω, so ergibt sich die finite Zahl 1, dagegen ist das Produkt $\Omega^2 \cdot \omega$ gleich Ω und damit infinit. Ω^2 ist also stärker infinit als Ω. Die Verknüpfungstabellen für die Grundrechenarten (Abbildung 3, Multiplikationstabelle) enthalten einige derartige „Offenheiten“, weswegen ihre Erstellung keineswegs eine Routinearbeit ist.

·	α	*x*	Γ
β	γ	γ	(?)
y	γ	*z*	Θ
Δ	(?)	Θ	Θ

Es bedeuten
α,β,γ : infinitesimale Zahlen
x, *y*, *z*, : finite, nicht infinitesimale Zahlen
Γ,Δ,Θ : infinite Zahlen
(?) : Die Zuordnung des Ergebnisses zu den

Abb. 3: Multiplikationstabelle für die Menge ℍ

Ebenfalls in diese Teilsequenz fiel die Behandlung des reellen Teils hyperreeller Zahlen, der bereits bei der graphischen Darstellung infinitesimaler Zahlen sowie anderer finiter, nicht reeller hyperreeller Zahlen vorbereitet worden war. Deswegen wurde

auf den schwierigen Existenzbeweis verzichtet und nur die Eindeutigkeit bewiesen, was den Schülern leicht fiel. An dieser Stelle wurde auch behandelt, dass eine Grenze zwischen „finit" und „infinit" nicht angebbar ist, wozu auch gehörte, dass infinite Zahlen keinen reellen Teil besitzen.

Um mit den hyperrellen Zahlen Analysis betreiben zu können, mussten die Schüler noch die Verträglichkeit der Operation „Bilden des reellen Teils" mit den Grundrechenarten lernen. Ohne große Hilfe zeigten die Schüler beispielsweise für die Multiplikation der Zahlen $h = a + \alpha$ und $k = b + \beta$, dass

$$\mathrm{RT}(h \cdot k) = \mathrm{RT}[(a+\alpha)\cdot(b+\beta)] = \mathrm{RT}(a\cdot b + a\cdot\beta + \alpha\cdot b + \alpha\cdot\beta) = a\cdot b = RT(h)\cdot \mathrm{RT}(k)$$

gilt, was aus der Multiplikationstabelle folgt.

Hyperreelle Zahlen waren nun in dem für die Differenzial- und Integralrechnung notwendigen Umfang eingeführt. Der Absicherung und Festigung des bisher Gelernten dienten Übungen. Neben der Bestimmung reeller Teile gehörten dazu auch Aufgaben zur Bestimmung des Bereichs, dem ein Verknüpfungsergebnis hyperreller Zahlen zuzuordnen ist.

3. Einführung der Differenzialrechnung

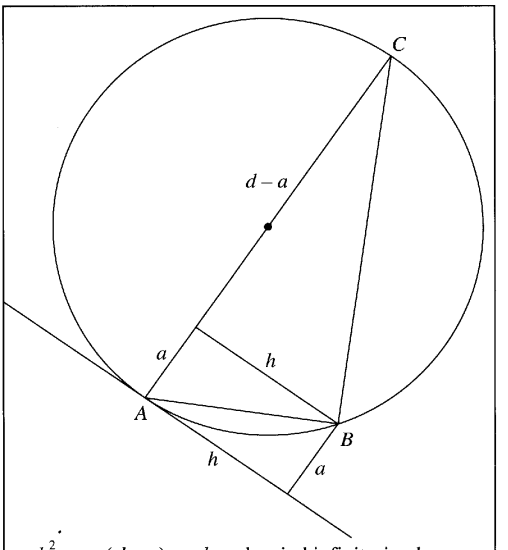
3.1 Funktionsgraphen bei verschiedenen Maßstäben

Der Einstieg in die Differenzialrechnung geschah über die Betrachtung von Geraden und Kreisen und Maßstabsvergrößerungen mit ihnen.

Unterstützt durch Folien erkannten die Schüler bald, dass Geraden und Winkel bei jeder Vergrößerung erhalten bleiben, dass aber Kreisbögen immer gestreckter erscheinen, je stärker man sie vergrößert.

Das bisher Gelernte über hyperreelle Zahlen motivierte die Schüler zu der Frage, was passiert, wenn man mit einem infiniten Faktor vergrößert. Die Kreislinie müsste dann infinit gestreckt sein, d. h. wie eine Gerade aussehen. Von der Tangente im betrachteten Punkt wäre sie dann nicht mehr zu unterscheiden, was natürlich noch zu beweisen war.

Der Beweis, dass die Kreislinie in dieser Vergrößerung als Gerade zu zeichnen war, benutzt den Höhensatz am rechtwinkligen Dreieck, einen sonst in der Schule nur am Rande behandelten Satz. Abbildung 4 zeigt die Verhältnisse wegen der Anschaulichkeit in einem finiten Maßstab sowie die Rechnung dazu.



$h^2 = a\,(d-a)$ $\quad h$ und a sind infinitesimal

$h = \sqrt{a}\cdot\sqrt{d-a}$ $\quad (d-a)$ ist finit

$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{d-a}}{\sqrt{a}}$ $\quad$ Quotient ist infinit

$\Rightarrow a$ ist stärker infinitesimal als h

Abb. 4: Bei Vergrößerung mit einem infiniten Faktor erscheint der Kreis als eine Gerade.

Die geometrischen Beziehungen gelten aber auch für infinitesimale Streckenlängen und werden für einen infinitesimalen Maßstab interpretiert.

Zu klären war, ob ein infinitesimal benachbarter Kreispunkt des Tangentenberührpunktes auch nach Anwendung eines infiniten Vergrößerungsfaktors bereits „neben" der Tangente gezeichnet werden muss. Das Ergebnis war, dass dieser Nachbarpunkt einen stärker infinitesimalen Abstand von der Tangente besitzt als er vom Tangentenberührpunkt entfernt ist. Die Schüler verallgemeinerten diese Erkenntnis, indem sie sagten, dass zwei infinitesimale Längen nur dann in der gleichen Vergrößerung mit finiter Länge zeichenbar sind, wenn ihr Quotient finit ist. Damit war der Zusammenhang zwischen Kreis und Tangente auf eine neue Grundlage gestellt. Insbesondere war sehr deutlich, wie sich eine Tangente an den Kreis anschmiegt.

3.2 Tangente und 1. Ableitung

Das Problem von Steigung und Tangente wurde nun auf die Normalparabel übertragen. Wie wäre sie zu zeichnen, wenn man sie – nach hyperreeller Erweiterung – an einem Punkt P mit einem infiniten Faktor vergrößert? Dass das Schaubild dann eine Gerade ist, wurde sehr ähnlich wie bei der Kreislinie bewiesen. Auch bei der Parabel ist die Krümmung bei dieser Vergrößerung von infinitesimaler Größenordnung und somit nicht zeichenbar. Die Parabel besitzt also das gleiche vergrößerte Bild wie eine ganz bestimmte Gerade. Diese sollte von nun an die Tangente der Parabel im betrachteten Punkt sein. Abbildung 5 veranschaulicht den Gedankengang für den Graphen G_f einer Funktion f.

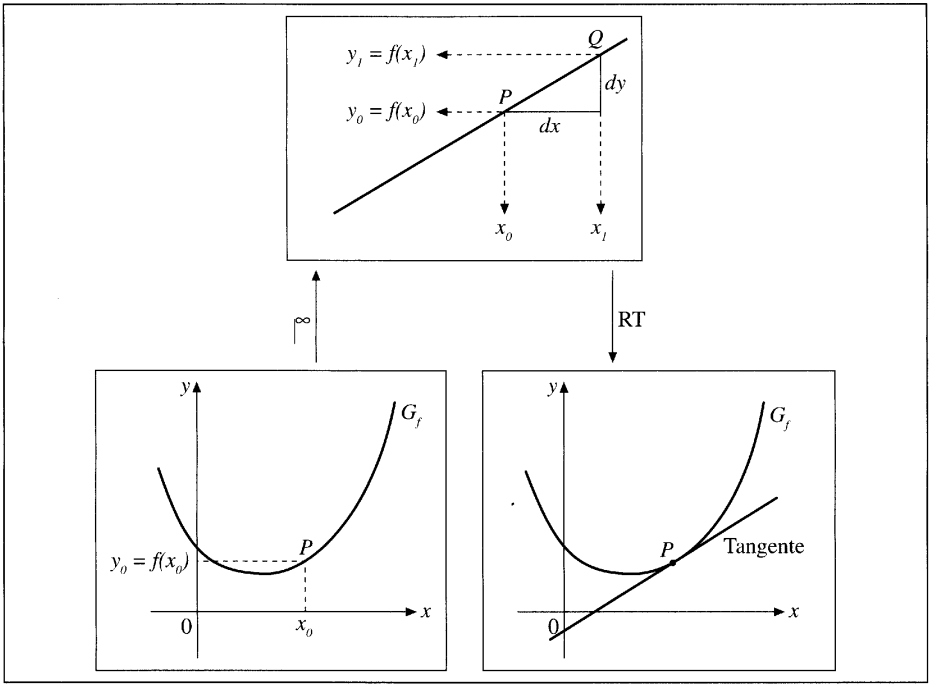


Abb. 5: Die Funktion wird zunächst hyperreell erweitert, ihr Graph danach mit einem infiniten Faktor vergrößert. Der Graph erscheint dann als Gerade mit einer bestimmten Steigung. Nach Übergang zum reellen Teil und Rücknahme der Vergrößerung erscheint der Graph mit Tangente in P.

Die Tangente an einer Parabel war damit auf eine sehr anschauliche Weise eingeführt. Gleichzeitig war für die Schüler die Bedingung erkennbar, unter der eine Kurve überhaupt eine Tangente besitzen kann. Das ist nämlich dann der Fall, wenn sie bei Vergrößerung mit einem infiniten Faktor als Gerade erscheint. Mir als Lehrer blieb nur noch, den Fachbegriff zu vermitteln: Funktionen, deren Graphen diese Eigenschaft besitzen, nennt man differenzierbar.

Damit war der Einstieg in die Begrifflichkeit der Differenzialrechnung gefunden. Wegen der einheitlichen Nomenklatur war es nun erforderlich, die traditionellen, auf Leibniz zurückgehenden, Begriffe der Differenzialrechnung einzuführen. Die folgende Argumentation war für die Schüler sehr leicht nachvollziehbar: „Zwei infinitesimal benachbarte Punkte P und Q unterscheiden sich in x-Richtung um einen infinitesimalen Wert, den man aus historischen Gründen ein Differenzial nennt und mit dx bezeichnet. Entsprechend unterscheiden sich die zugehörigen y-Werte um das Differenzial dy. Da dy und dx Zahlen sind, kann man mit ihnen rechnen, beispielsweise auch dividieren. Bei der Division von dy durch dx ergibt sich somit ein Differenzialquotient, sofern $dx \neq 0$ gilt, was hier der Fall ist."

Der Differenzialquotient ist bei diesem Zugang tatsächlich ein Quotient, weswegen auch dy durch dx gesprochen wird. Weiter: „Ist eine Funktion an einer bestimmten Stelle differenzierbar, so besitzen dort alle möglichen Differenzialquotienten denselben reellen Teil. Bestimmt man ihn, so geht man damit gleichzeitig in die reelle Zahlenwelt zurück." Damit waren wir wieder bei der reellen Normalparabel, die ja Gegenstand der Untersuchung war, nun aber zusätzlich versehen mit der Tangente im Punkt P. Schließlich blieb wieder nur die Mitteilung der Fachbegriffes: „Diesen reellen Teil aller Differenzialquotienten an einer bestimmten Stelle x_0 nennt man die 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle. Sie gibt die Steigung sowohl von Tangente als auch Kurve im betrachteten Punkt an."

Die Berechnung des reellen Teils ist auch für die Schüler einfach. Für den Punkt $P(2;4)$ erhält man mithilfe eines infinitesimal benachbarten Punktes $Q(2 + dx;(2 + dx)^2)$

$$\mathrm{RT}\left(\frac{f(2+dx) - f(2)}{dx}\right) = \mathrm{RT}\left(\frac{4 + 4dx + (dx)^2 - 4}{dx}\right) = \ldots = \mathrm{RT}(4 + dx) = 4.$$

Der „Eingeweihte" wird feststellen, dass die erforderlichen Termumformungen dieselben sind wie in der „Grenzwertanalysis", allerdings „befreit vom Limes". Vergleicht man „Infinitesimalanalysis" mit „Grenzwertanalysis", so wird deutlich, dass die zumindest vielen Schülern lästige Symbolik $\lim\limits_{dx \to 0}$ wegfällt, die im Grunde genommen nur durch die Termumformungen hindurch geschleppt werden muss. $\lim\limits_{dx \to 0}$ symbolisiert einen Prozess, der in der „Infinitesimalanalysis" nicht notwendig ist, da die hyperreellen Zahlen das Unendliche bereits zahlenmäßig beschreiben.

Bei diesem Zugang zur 1. Ableitung waren also keine großen Klippen zu umschiffen. Auch für die Schüler stellte er jedenfalls kein Problem dar. Das Handwerkszeug, mit dem Unendlichen zu rechnen, war ihnen ja bereits vertraut, sodass sie es zur Bestimmung der 1. Ableitung nur noch anzuwenden brauchten. Besonders hilfreich war die graphische Unterstützung. Zwar wird auch beim Zugang über Grenzwerte mit vielen Zeichnungen gearbeitet; aber hier wurde von den Schülern nicht verlangt, sich eine irgendwie geartete Bewegung in der Zeichnung vorzustellen. Es ist eben hier nicht so, dass eine Sekante zur Tangente wird. Vielmehr ist die Tangente in der mit einem infiniten Faktor vergrößerten Zeichnung der Normalparabel bereits sichtbar, und ihre Steigung ergibt sich mit einer sehr einfachen Rechenoperation.

3.3 Regeln der Differenzialrechnung

Die weitere thematische Vorgehensweise war die gleiche wie bei der „Grenzwertanalysis", methodisch unterschied sie sich aber durch die Verwendung hyperreeller Zahlen. Es folgten Übungen zur Berechnung weiterer konkreter Steigungen, schließlich wurde die Verallgemeinerung zur Ableitungsfunktion vollzogen. Ableitungen unterschiedlicher Potenzfunktionen führten wie üblich zur allgemeinen Ableitung von Funktionen dieser Klasse. Es schlossen sich Identitäts-, Konstanten-, Summen- und Faktorregel an, die die Schüler teilweise in arbeitsteiliger Gruppenarbeit bestimmten. Das fiel ihnen leicht, da sie den Beweisen der entsprechenden Regeln nicht Vermutungen voranstellen mussten, sondern die ersten Ableitungen jeweils einfach ausrechneten. Jedesmal war nach Erweiterung der Funktion ins Hyperreelle zunächst ein Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ mit beliebigem $dx \neq 0$ aufzustellen, dieser umzuformen und danach der reelle Teil zu bilden. Der Eigenarbeit der Schüler kam dabei zugute, dass sie nicht auf die nach aller Erfahrung zunächst unangenehme Limesschreibweise zurückgreifen mussten.

Dem Leser stelle ich anheim, diese einfachen Regeln mithilfe hyperreeller Zahlen selbst zu errechnen. Auch hier sind dieselben Termumformungen vorzunehmen wie bei der Arbeit mit Grenzwerten, z. B. beginnt die Rechnung für die Summenregel mit

$$\mathrm{RT}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \mathrm{RT}\left(\frac{d\,[g(x)+h(x)]}{dx}\right) = \ldots .$$

Damit stand den Schülern alles zur Verfügung, um Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben bearbeiten zu können. Ebenso konnten sie Funktionalgleichungen aus Eigenschaften der Steigung und der Krümmung ihrer Graphen aufstellen. Sie waren also dort angekommen, wo sie auch über Grenzwerte hätten ankommen müssen. Nach meiner Erfahrung hat der Weg über die hyperreellen Zahlen weniger Zeit benötigt als der über Grenzwerte. Bei vielem, das nun aber thematisch folgt, werden Grenzwerte nicht unbedingt benötigt. Nach aller Erfahrung würden Schüler dieses für viele von ihnen unangenehme deswegen Kapitel schnell vergessen.

4. Einführung der Integralrechnung

4.1 Rechtecke mit infinitesimaler Breite

Üblicherweise beginnt der Unterricht zur Integralrechnung mit dem Problem, den Inhalt krummlinig berandeter Flächen zu berechnen. Zum Einstieg in dieses Gebiet ist dieses Vorgehen wegen seiner Anschaulichkeit auch bei der Arbeit mit hyperreellen Zahlen sinnvoll und richtig. Gegenüber der herkömmlichen „Grenzwertanalysis" kommen durch die Infinitesimalanalysis sehr schnell wesentliche Erleichterungen für den unterrichtenden Lehrer wie für die Schüler zum Tragen. Dies geschieht wie in der Differenzialrechnung bereits bei den einfachen, noch an konkreten Zahlen orientierten Beispielen.

Um den Schülern den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen und dessen Stammfunktion nahe zu legen, ließ ich sie zunächst Flächeninhalte unter Geraden bei variabler oberer Grenze berechnen. Dabei befand sich die untere Grenze zunächst bei 0, wurde dann aber auch an andere Stellen gesetzt. Die Schüler zogen daraus die Erkenntnis, dass – zumindest bei konstanten und linearen Funktionen – Stammfunktionen jeweils eine Rolle beim Flächeninhalt spielen. Ob sich diese Vermutung bei einer krummlinig berandeten Fläche erhärten lässt, sollte dann an der Normalparabel untersucht werden.

Die Schüler erkannten sofort die Schwierigkeiten. Inhaltsberechnungen konnten sie nur bei Kreisen oder geradlinig begrenzten Flächen vornehmen. Es war natürlich nicht schwierig, die Diskussion so zu lenken, dass man dem tatsächlichen Flächeninhalt doch zumindest ziemlich nahe kommen könne, wenn man die untersuchte Fläche mit schmalen Rechtecken auslegte.

An dieser Stelle war es noch nicht sinnvoll, auf infinitesimal schmale Rechtecke zu orientierten, denn für den Lernerfolg war es wichtig, zunächst die algebraische Struktur der Flächeninhaltsberechnung mit den Schülern einzuüben. Beispielhaft wurde also aus didaktischen Gründen das untersuchte Intervall [0;1] erst einmal in acht gleiche Abschnitte unterteilt. Es ergab sich für die Summe der sieben Rechteckflächeninhalte zwischen Graph und x-Achse (für „Eingeweihte“: die Untersumme)

$$A_8(1) = \ldots = \left(\frac{1}{8}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 7^2) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 = \frac{140}{512} < \frac{1}{3} \cdot 1^3 .$$

Positiv war an diesem Ergebnis bereits, dass es kleiner als das erwartete (nämlich Stammfunktion mit $c = 0$ an der Stelle 1) war. Dabei wurde auf den Beweis, dass die Summe der Quadrate in o. g. Produkt umgewandelt werden kann, verzichtet. Schüler meinten nun, dass das Rechenergebnis desto weniger vom gesuchten Flächeninhalt abwiche, je schmaler man die Rechtecke machte. „Sie müssen infinitesimal schmal sein“, kam recht schnell von Schülerseite. Die hyperreellen Zahlen und die Vorstellung von ihnen war also gut in den Köpfen der Schüler verankert.

Es wurde nun der verbleibende Fehler betrachtet, wenn man infinit viele Rechtecke von infinitesimaler Breite nimmt. Die Vergrößerung mit der „Unendlichkeitsbrille“ streckte den berandenden Funktionsgraphen zu einer Geraden. Die Schüler erkannten, dass bei geeigneter Anordnung der Rechtecke diese den Flächeninhalt bis auf eine infinitesimale Abweichung, her-vorgerufen durch die nicht zeichenbare Krümmung des Graphen, exakt ergäbe, nämlich wenn man den Funktionswert der jeweiligen Intervallmitte als Seitenlänge des Rechtecks wählt.

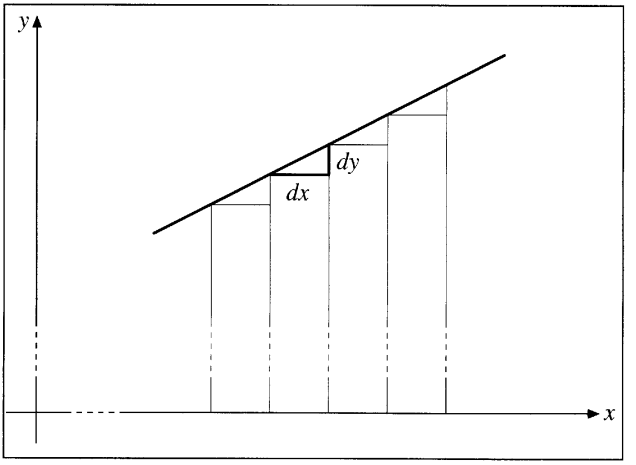


Abb. 6: Rechtecke von infinitesimaler Breite unter der mit einem infiniten Faktor vergrößerten Normalparabel. Die Strichelung macht die infinite Entfernung zu den Achsen deutlich.

Aber auch, wenn man kleinere oder größere Rechtecke nähme, wäre eine Abweichung nur infinitesimal groß. Dies zeigt Abbildung 6.

Aber auch bei allen Summationen der Rechteckflächen muss sich ergeben, dass sie nur infinitesimal vom Flächeninhalt unter dem Graphen abweichen und somit denselben reellen Teil besitzen. Dies war zu klären, denn bei einer infinitesimalen Abweichung jeder einzelner Rechteckfläche vom jeweiligen infinitesimal breiten Flächenstück unter dem Graphen könnte die Summe, da infinit viele Rechtecke zu

addieren sind, eine nicht mehr infinitesimale Abweichung ergeben. Dass dies nicht der Fall ist, ließ sich jedoch zeigen.

Innerhalb eines Intervalls der infinitesimalen Breite dx eines Rechtecks variiert der Funktionswert von f um einen maximalen, aber ebenfalls infinitesimalen Wert s_i. Der Flächeninhalt weicht dann höchstens um das Produkt $(dA)_i = dx \cdot s_i$ vom gesuchten Flächeninhalt ab. Dabei ist s_i die größte Abweichung der Funktion f von der Höhe des Rechtecks y_i im jeweiligen Intervall. Jedes Rechteck besitzt i. a. eine andere Schwankungsbreite. Schätzt man die Summe aller Schwankungsbreiten nach oben ab, indem man die größte von ihnen – dass diese größte Abweichung existiert, ist eine Eigenschaft hyperfiniter Mengen – für alle annimmt, und summiert dann für alle N (ein großes griechisches Ny) Rechtecke, so erhält man für die Gesamtabweichung der Rechtecksumme vom gesuchten Flächeninhalt $(dA)_{max} = N \cdot dx \cdot s_{max}$. Da $N \cdot dx$ gleich der reellen Intervalllänge ist, ist das Produkt $(dA)_{max}$ wegen des weiteren infinitesimalen Faktors s_{max} aber infinitesimal. Damit weichen also alle Summen infinitesimal breiter Rechtecke nur infinitesimal vom gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen ab.

Der Leser erkennt, dass es nicht mehr unbedingt nötig ist, von Ober- und Untersummen zu sprechen. Hier reicht als Erklärung aus, dass der Unterschied aller Summationen von Rechtecken, die jeweils alle einen Punkt (ihrer infinitesimal breiten Seite) mit dem Graphen gemeinsam haben, infinitesimal ist. Sie besitzen damit alle denselben reellen Teil, welcher der gesuchte Flächeninhalt ist.

Die Schüler führten die Rechnung an der Tafel aus und erhielten

$$A_N(1) = \ldots$$

$$\ldots = (dx)^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (N-1)^2)$$

$$= (dx)^3 \cdot \frac{1}{6} (N-1) \cdot N \cdot (2N-1)$$

$$= (dx)^3 \cdot \frac{1}{6} (2N^3 - 3N^2 + N).$$

Wegen $N \cdot dx = 1$ ergab sich nach Ausmultiplizieren

$$A_N(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} dx + \frac{1}{6} (dx)^2,$$

dessen reeller Teil gleich dem erwarteten $\frac{1}{3} \cdot 1^3$ war.

Für den Fall, dass die obere Grenze bei b liegt, erhielten die Schüler entsprechend $\frac{1}{3} \cdot b^3$, womit für die Parabel ebenfalls gezeigt war, dass Flächen unter ihr über eine Stammfunktion zu berechnen sind, dass also die Flächeninhaltsfunktion eine Stammfunktion der Funktion des berandenden Graphen ist.

Ich denke, am Beispiel der Parabel wurde deutlich, dass die hyperreellen Zahlen ein gutes Hilfsmittel sind, Flächeninhalte zur Einführung der Integralrechnung zu benutzen. Nach gedanklicher Durchdringung des Problems waren die Schüler in der Lage, den Flächeninhalt (im wahrsten Sinne des Wortes) zu berechnen.

4.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die bisherigen Erkenntnisse waren natürlich noch nicht allgemeingültig. Es musste der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen werden. Schwieriger zu zeigen ist, dass $F'(x) = f(x)$ gilt, also der „Ableitungsteil". Der „Stammfunktions-

teil“ wurde danach (kurz und formal behandelt) von den Schülern aufgrund des vorangegangenen Unterrichts sofort akzeptiert.

Die Schwierigkeit für die Schüler besteht beim „Ableitungsteil“ in der Häufung von Formalismen. Dadurch aber, dass bei der Verwendung hyperreeller Zahlen „wenigstens“ die Limesschreibweise nicht auftritt, tritt doch eine bedeutende Vereinfachung ein. Zu zeigen ist bekanntlich die Gültigkeit von

$$F'(x) = \mathrm{RT}\left(\frac{dF(x)}{dx}\right) = f(x)$$

Das Differenzial $dF(x)$ bedeutet $F(x + dx) - F(x)$, wie aus der Differenzialrechnung bekannt.

‚Dabei gelten $F(x+dx) = \int_a^{x+dx} f(t)\,dt$ sowie $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, deren Unterschied in der mit infinitem Faktor vergrößerten Zeichnung gerade ein „Trapez“ der Höhe dx ist. Dies konnte ich den Schülern anhand der bereits bei der Parabel verwendeten Zeichnung verdeutlichen.

Der das Differenzial $dF(x)$ beschreibende Flächeninhalt lag nun im Größenvergleich zwischen den Rechteckinhalten $u \cdot dx$ und $o \cdot dx$. Bei Beschränkung auf positive Funktionswerte steht u für den kleineren Funktionswert der Intervallränder und o für den größeren. Diese Flächen konnten bei waagerechtem Verlauf des Graphen auch alle gleich groß sein, so dass sich die Ungleichungskette $u \cdot dx \le \int_x^{x+dx} f(t)\,dt \le o \cdot dx$ ergab. Division durch dx und anschließende Bildung des reellen Teils führten auf

$$f(x) = \mathrm{RT}(u) \le \mathrm{RT}\left(\frac{\int_x^{x+dx} f(t)\,dt}{dx}\right) dx \le \mathrm{RT}(o) = f(x),$$

womit der Satz bewiesen war. u und o sind nämlich infinitesimal benachbart und besitzen somit denselben reellen Teil $f(x)$, sodass für die Kette nur die Gleichheit gelten kann.

Auch der Beweis des Hauptsatzes zeigt die Vorteile der Infinitesimalmathematik. Wie bei den Regeln der Differenzialrechnung wird auch hier der Zusammenhang errechnet.

4.3 Regeln der Integralrechnung

Als einfache Regeln der Integralrechnung folgten nun die Intervalladditivität, die Integration von Funktionssummen, die Faktorregel sowie die Regel über die Vertauschung der Grenzen. Sie alle lassen sich nach demselben Prinzip errechnen, was die Schüler arbeitsteilig und z. T. als Hausaufgabe durchführten. Zunächst sind nach Erweiterung ins Hyperreelle die Integrale als reeller Teil infiniter Summen über infinitesimal breite Rechtecke, also z. B.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{RT}\sum_{i=1}^{\Delta} (f(a + i \cdot dx) \cdot dx),$$

zu schreiben. Anschließend führt man die jeweils geeigneten Operationen innerhalb der Summen durch, um danach wieder zur Integralschreibweise zurückzukehren. Auch hierbei wird also zunächst die Funktion ins Hyperreelle erweitert, wo die erforderlichen

Umformungen stattfinden. Mit dem Bilden des reellen Teils geht man zum Schluss wieder in die reelle Zahlenwelt zurück.

Es zeigte sich auch hier als sehr positiv, dass auf die Limesschreibweise verzichtet werden konnte. Die Schüler waren fähig, die selbst errechneten Regeln in Anwendungsaufgaben sicher einzubringen.

5. Schlussbetrachtung

Mit diesem Beitrag sollte anhand von Unterrichtserfahrungen deutlich werden, dass der didaktische Ansatz, die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung mithilfe hyperreller Zahlen zu erarbeiten, schlüssig ist und gegenüber dem herkömmlichen Herangehen über Grenzwerte eine Reihe von Vorteilen bietet. Sie sollen für Kolleginnen und Kollegen Anregung sein, es ebenfalls einmal mit den hyperrellen Zahlen zu versuchen.

Zum einen werden Schwierigkeiten gleichmäßiger auf den Unterricht verteilt und treten nicht an manchen Stellen gehäuft auf. Dies zeigt bereits die Gliederung dieses Aufsatzes, die auch dem Unterrichtsgang entspricht. Zunächst wird das Unendliche quantifiziert, indem der reelle Zahlenkörper um Zahlen erweitert wird, die betragsmäßig unendlich groß und unendlich klein sind. Nach diesem Schritt erst wird im wahrsten Sinne des Wortes mit den Differenzialen gerechnet. Im dritten Schritt werden mit diesen Differenzialen auch Inhalte krummlinig berandeter Flächen berechnet.

Der zweite Vorteil besteht darin, dass man die entsprechenden Regeln errechnen kann, was Schülern leichter fällt. Sie brauchen i. a. nicht ein Ergebnis zu vermuten und anschließend dessen Wahrheitsgehalt zu beweisen. Diese Möglichkeit, Regeln zu errechnen, hat ihre Ursache in der vorher erfolgten Quantifizierung des Unendlichen in Form der hyperreellen Zahlen. Ganz ähnlich wie man in der analytischen Geometrie den Satz des Pythagoras in einer Zeile beweisen kann, nachdem man ihn in das Skalarprodukt hineingesteckt hat, sind in der Infinitesimalanalysis die zu findenden Regeln implizit ebenfalls bereits mit den hyperrellen Zahlen erschaffen worden. Die Schüler brauchen sie nur noch rechnerisch zu „destillieren"; sie müssen sich dem Ergebnis nicht erst über alle Grenzen hinweg nähern, denn sie sind bereits unendlich dicht dran.

Zum dritten ist das Vorgehen dadurch besonders anschaulich, dass die verwendeten Grafiken immer Zustände beschreiben und nie Vorgänge.

Zum vierten ergiebt sich eine Gelegenheit, den Folgencharakter der Intervallschachtelung auf höherem Niveau erneut ins Bewusstsein zu heben. Dies kann in der neunten Jahrgangsstufe bei der Einführung von irrationalen Zahlen nur auf einem niedrigen Präzisionsniveau erfolgen und wird bis zur gymnasialen Oberstufe zumeist wieder verschüttet.

Und schließlich ist es doch auch eine neue Qualität, wenn man die Fähigkeit gewinnt, mit dem Unendlichen quantitativ, und nicht nur qualitativ, umzugehen.

Unendliche Reihen

von Thomas Kirski

1. Konvergenz unendlicher Reihen

Um die Unmöglichkeit jeglicher Bewegung zu beweisen, benutzte der Philosoph Zenon von Elea (ca. 490 bis 430 v. Chr.) u. a. das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, die beide ein Wettrennen durchführen sollen. Wegen ihrer sprichwörtlichen Langsamkeit erhält die Schildkröte allerdings einen Vorsprung, den Achilles zunächst einmal aufholen muss. Während dessen bewegt sich die Schildkröte jedoch ebenfalls weiter, so dass nun ein neuer Vorsprung entsteht.

Zenon argumentiert nun so: Da jedesmal ein weiterer, wenn auch immer kleiner werdender Abstand übrig bleibt, müsste Achilles eine unendliche Anzahl von Abständen überwinden, und daher kann die Bewegung niemals vollendet werden.

Um Zenon zu widerlegen, müssen wir nachweisen, dass diese unendliche Anzahl von Aufholvorgängen doch in endlicher Zeit erfolgt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass Achilles doppelt so schnell wie die Schildkröte läuft. (Es reicht natürlich aus, wenn er überhaupt schneller läuft, s. u.).

Wir bezeichnen die Zeit, die Achilles benötigt, um den ersten Vorsprung der Schildkröte aufzuholen, mit t. Da die Schildkröte während dieser Zeitspanne nur halb so weit kommt wie Achilles, braucht dieser für den zweiten Vorsprung nur noch $\frac{1}{2}t$, für den dritten $\frac{1}{4}t$, für den vierten $\frac{1}{8}t$ usw. Die gesamte Zeit T, die Achilles benötigt, um die Schildkröte gerade einzuholen, beträgt daher

$$\begin{aligned} T &= t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t + \ldots \\ &= t\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Wenn wir Zenon widerlegen wollen, müssen wir also zeigen, dass diese Summe unendlich vieler reeller Zahlen, die man üblicherweise *unendliche Reihe* nennt, zu einer bestimmten „endlichen" reellen Zahl gehört. Eine solche unendliche Reihe nennt man dann *konvergent.*

Setzen wir die Existenz hyperreeller, also insbesondere infiniter und infinitesimaler Zahlen voraus, dann können wir die Konvergenz unendlicher Reihen mühelos definieren:

Definition 1 (Konvergente unendliche Reihe)
Eine unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$
heißt konvergent genau dann, wenn für jedes infinite hypernatürliche[1] N *die Summe* $\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} a_i$
finit ist und unabhängig von N *denselben reellen Teil besitzt.*
Für diesen reellen Teil benutzen wir folgende Schreibweise:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := RT\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} a_i\right)$$

Bei der zu untersuchenden Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^N$ handelt es sich um eine *geometrische Reihe*, die allgemein die Form

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^N$

mit $q \in \mathbb{R}$ hat. In unserem Beispiel ist also $q = \frac{1}{2}$. Es kann mithilfe infinitesimaler Zahlen leicht gezeigt werden, dass jede geometrische Reihe mit $|q| < 1$ konvergiert. Dazu betrachten wir die Summe

$S_N = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^N$.

Dann ist

$q \cdot S_N = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{N+1}$,

also gilt offensichtlich

$S_N - q \cdot S_N = 1 - q^{N+1}$

und damit

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{N+1}}{1 - q}.$$

Wenn nun $|q| < 1$ gilt, dann ist für jedes infinite hypernatürliche N der Term q^{N+1} und damit auch der gesamte letzte Summand infinitesimal[2]. Dann gilt unabhängig von der Wahl von N

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = RT(S_N) = \frac{1}{1 - q}.$$

Läuft Achilles doppelt so schnell wie die Schildkröte, dann ist $q = \frac{1}{2}$. Die (reelle) Zeit, bis Achilles sie eingeholt hat, beträgt also

$$RT(T) = t \cdot RT\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) = 2t.$$

Allgemein gilt: Läuft Achilles p-mal so schnell wie die Schildkröte, dann ist $q = \frac{1}{p}$, und die Zeit bis zum Aufholen beträgt $\frac{p}{p-1} \cdot t$. Wir erhalten für diese Zeit einen „endlichen" Wert, solange $p > 1$ ist, also solange Achilles überhaupt (mehr als infinitesimal) schneller läuft als die Schildkröte.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{N(N+1)}.$$

Mithilfe vollständiger Induktion erhalten wir für eine beliebige Summe

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}.$$

Durch Division mit Rest ergibt sich dann für jedes infinite N:

$$RT(S_N) = RT\left(\frac{1}{N+1}\right) = RT\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Die Reihe konvergiert also und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

2. Weitere Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Um nicht immer auf die Definition 1 zurückgreifen zu müssen, sind weitere Kriterien für die Konvergenz von unendlichen Reihen nützlich. Besonders anschaulich ist das folgende Konvergenzkriterium, das sich unmittelbar aus der Definition ergibt:

Satz 1
Eine unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *ist genau dann konvergent, wenn für alle infiniten* M *und* N, (M < N), *gilt*:

$$RT\left(\sum_{i=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_i\right) = 0$$

Das bedeutet: eine unendliche Reihe konvergiert genau dann, wenn der Reihenrest zu einer beliebigen infiniten Teilsumme infinitesimal ist.

Beweis
Wir betrachten die beiden infiniten Teilsummen $S_{\mathrm{M}} = \sum_{i=0}^{\mathrm{M}} a_i$ und $S_{\mathrm{N}} = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} a_i$.
Wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergiert, sind die reellen Teile aller infiniten Teilsummen gleich: $RT(S_{\mathrm{N}}) = RT(S_{\mathrm{M}})$. Daher gilt dann

$$RT(S_{\mathrm{N}}) - RT(S_{\mathrm{M}}) = RT(S_{\mathrm{N}} - S_{\mathrm{M}}) = RT\left(\sum_{i=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_i\right) = 0$$

und umgekehrt.

Betrachten wir als Beispiel die *harmonische Reihe*:

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Diese Reihe konvergiert nicht, denn wir erhalten beispielsweise

$$\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{k} = \frac{1}{\mathrm{N}+1} + \frac{1}{\mathrm{N}+2} + \frac{1}{\mathrm{N}+3} + \ldots + \frac{1}{2\mathrm{N}} > \mathrm{N} \cdot \frac{1}{2\mathrm{N}} = \frac{1}{2}.$$

Der Reihenrest zu dieser infiniten Teilsumme ist also sicher nicht infinitesimal. Eine unendliche Reihe kann selbstverständlich nicht konvergieren, wenn ihre Summanden mit wachsendem Index immer größer werden. Daher ist das folgende, sehr nützliche Konvergenzkriterium plausibel.

Satz 2 (Quotientenkriterium)
Wenn für alle infiniten Indizes N *der Absolutwert des Quotienten zweier aufeinander folgender Summanden einer unendlichen Reihe finit ist und ein und denselben reellen Teil r besitzt, der kleiner als* 1 *ist, dann ist diese Reihe konvergent.*
Kurz:

$$RT\left(\left|\frac{a_{\mathrm{N}+1}}{a_{\mathrm{N}}}\right|\right) = r < 1 \quad \Rightarrow \quad RT\left(\sum_{i=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_i\right) = 0$$

Ist $r > 1$, *dann konvergiert die Reihe nicht.*

Beweis

Sei q eine reelle Zahl zwischen r und 1. Weil r der reelle Teil der Quotienten ist, muss für alle infiniten N gelten:

$$\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| < q \quad \text{oder auch} \quad |a_{N+1}| < q \cdot |a_N| .$$

In der Menge der hyperreellen Zahlen $\mathbb{H}$ gilt also die formale Aussage

$$\forall n_0 \exists n \geq n_0 : \quad |a_{N+1}| < q \cdot |a_N|$$

(wir können ja n_0 infinit wählen).

Diese Aussage gilt nach dem Transferprinzip auch in $\mathbb{R}$, d. h. auch für ein finites n_0. Wir erhalten daher fortlaufend:

$|a_{N+1}| < q \cdot |a_{n_0}|$, $\quad |a_{n+2}| < q^2 \cdot |a_{n_0}|$, $\quad |a_{n+3}| < q^3 \cdot |a_{n_0}|$, ... und für $i > n_0$ gilt demnach:

$$|a_i| < q^{i-n_0} \cdot |a_{n_0}|$$

Nach diesen Vorüberlegungen können wir unsere Summe $\sum_{i=M}^{N} a_i$ durch die geometrische Summe $\sum_{i=M}^{N} q^i$ abschätzen:

$$0 < \sum_{i=M}^{N} a_i < \sum_{i=M}^{N} |a_{n_0}| \cdot q^{i-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot \sum_{i=M}^{N} q^i$$

Der gesuchte reelle Teil $RT\left(\sum_{i=M}^{N} a_i\right)$ ist also Null, denn es gilt:

$$0 \leq \sum_{i=M}^{N} a_i \leq RT\left(\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\right) \cdot RT\left(\sum_{i=M}^{N} q^i\right),$$

denn der Bruch $\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$ ist sicher finit und die geometrische Reihe konvergiert für $q < 1$,

das heißt $RT\left(\sum_{i=M}^{N} q^i\right) = 0$, q. e. d.

Mithilfe des Quotientenkriteriums können wir leicht zeigen, dass beispielsweise die Reihe

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{k^2}{2^k} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \frac{36}{64} + \ldots + \frac{M^2}{2^M}$$

konvergiert. Denn mit $a_N := \frac{N^2}{2^N}$ erhalten wir für jedes infinite N

$$r = RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) = RT\left(\frac{(N+1)^2 \cdot 2^N}{2^{N+1} \cdot N^2}\right) = \frac{1}{2} RT\left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Auf die Reihe

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{M^2}$$

lässt sich das Quotientenkritierium nicht anwenden. Denn mit $a_N := \frac{1}{N^2}$ erhalten wir für jedes infinite N mithilfe der oben verwendeten Division mit Rest

$$\begin{aligned} RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) &= RT\left(\frac{N^2}{(N+1)^2}\right) \\ &= RT\left(\frac{N}{(N+1)}\right)^2 \\ &= RT\left(1 - \frac{N}{N+1}\right)^2 \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert aber, denn für alle Summanden gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$.

Wir haben oben schon gezeigt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert, also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{k(k+1)}$,

und da alle Summanden positiv sind, gilt für alle Reihenreste zu beliebigen infiniten Teilsummen nach Satz 1

$$RT\left(\sum_{k=M}^{N} \frac{1}{k^2}\right) = RT\left(\sum_{k=M}^{N} \frac{2}{k(k+1)}\right) = 0 .$$

Das Quotientenkriterium ist also nicht anwendbar, obwohl die Reihe konvergiert.

Wir untersuchen jetzt noch einmal die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{M} .$$

Wie wir oben schon gezeigt haben, konvergiert die harmonische Reihe nicht. Das Quotientenkriterium liefert hier

$$RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) = RT\left(\frac{N}{N+1}\right) = RT\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 ,$$

ist also wieder nicht anwendbar, obwohl die Reihe diesmal nicht konvergiert. Die beiden letzten Beispiel zeigen daher: *Das Quotentenkritierium ist nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe.*

3. Entwicklung von Funktionen durch Potenzreihen

Während Ableitungen bzw. Stammfunktionen zu den Polynomfunktionen p_n mit $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ leicht aufgefunden werden können, gibt es

andere Funktionen, bei denen dies nicht (einfach) möglich ist. Wie lauten z. B. Stammfunktionen von f mit $f(x) = \exp(-x^2)$ oder g mit $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$?

Daher ist es nützlich, dass beliebig oft differenzierbare Funktionen in Form von Potenzreihen geschrieben werden können, damit man diese dann gliedweise differenzieren bzw. integrieren oder zumindest Näherungswerte mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann.

Definition 2 (Potenzreihen)
Wenn für alle Indizes i die Summanden einer unendlichen Reihe die Form

$$a_i = k_i \cdot x^i$$

haben, dann heißt diese Reihe auch Potenzreihe, andernfalls nicht.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen ist grundsätzlich von der reellen Größe x abhängig. Mithilfe des Quotientenkriteriums können wir aber ermitteln, wann auf jeden Fall Konvergenz vorliegt. Wir untersuchen daher, wann der reelle Teil r der Quotienten existiert und kleiner als 1 ist. Dazu muss gelten:

$$1 > r = RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) = RT\left(\left|\frac{k_{N+1} \cdot x^{N+1}}{k_N \cdot x^N}\right|\right) = RT\left(\left|\frac{k_{N+1}}{k_N}\right|\right) \cdot |x|$$

Diese Ungleichung ist sicher erfüllt, wenn

$$|x| < RT\left(\left|\frac{k_N}{k_{N+1}}\right|\right).$$

Wir legen daher fest:

Definition 3 (Konvergenzradius)
Es sei $\sum_{i=0}^{N} k_i \cdot x_i$ *eine (hyperreelle erweiterte) Potenzreihe.*

$$R := RT\left(\left|\frac{k_N}{k_{N+1}}\right|\right)$$

heißt Konvergenzradius der Potenzreihe, falls R unabhängig von der Wahl der infiniten Zahl N *ist.*

Das bedeutet also, dass die betreffende Potenzreihe konvergiert, wenn $|x| < R$ ist.

Die *Taylorreihe* zu einer Funktion f mit der Entwicklungsstelle 0 ist eine Potenzreihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

und auch allgemeiner mit der Entwicklungsstelle x_0

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i.$$

Allerdings sind die hier aufgeschriebenen reellen Teile nur sinnvoll, wenn $|x - x_0|$ den Konvergenzradius nicht überschreitet.

Beispiele

(1) Es sei $f = \sin$ und $x_0 = 0$.
Sämtliche Ableitungen, die den Sinus enthalten, entfallen wegen $\sin(0) = 0$.

Daher ist $a_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot x^{2i+1}$, also $k_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}$. Der Quotient $\frac{k_N}{k_{N+1}}$ liefert:

$$\frac{k_N}{k_{N+1}} = \frac{\frac{(-1)^N}{(2N+1)!}}{\frac{(-1)^{N+1}}{((2N+1)+1)!}} = \frac{(2N+2)\,(2N+3)}{-1}$$

Sein Absolutbetrag ist also für jede infinite Zahl N positiv infinit. Von einem Konvergenzradius im Sinne der Definition kann nicht gesprochen werden; die Taylorreihe für den Sinus konvergiert für jede reelle Zahl x:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot x^{2i+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

Mithilfe dieser Potenzreihenentwicklung kann beispielsweise das Integral

$$\int_0^2 \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx$$

näherungsweise mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.

(2) Es sei $f = exp$ und $x_0 = 0$.

Wegen $\exp'(x) = \exp(x)$ ist $a_n = \frac{x^n}{n!}$, also $k_n = \frac{1}{n!}$. Der Quotient $\frac{k_N}{k_{N+1}}$ liefert:

$$\frac{k_N}{k_{N+1}} = \frac{(N+1)!}{N!} = N+1 .$$

Auch hier liegt kein Konvergenzradius im Sinne der Definition vor, die Exponentialreihe konvergiert für alle x, und es gilt:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

Daraus ergibt sich sofort die bequeme Möglichkeit zur Berechnung der *Eulerschen Zahl:*

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots .$$

Weiterhin wird beispielsweise die näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$$

ermöglicht, indem man die Exponentialreihe mit $-x^2$ statt mit x entwickelt und dann bis zur gewünschten Genauigkeit gliedweise integriert.

4. Vom Nutzen divergenter Reihen

Ein wesentlicher Nutzen bei der Verwendung infiniter und infinitesimaler Zahlen besteht darin, dass wir mit ihnen wie mit gewöhnlichen reellen Zahlen rechnen können. Dies zeigt sich besonders deutlich an dem folgenden Beispiel.

Die Beurteilung der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{M^2-1}$$

ist mit dem Quotientenkriterium nicht möglich, denn mit $a_N = \frac{1}{N^2-1}$ erhalten wir

$$RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) = RT\left(\frac{N^2-1}{(N+1)^2-1}\right) = RT\left(\frac{N^2-1}{(N^2+2N)}\right).$$

Durch Division mit Rest wird daraus

$$RT\left(\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\right) = RT\left(1 - \frac{2}{N} + \frac{3}{N^2+2N}\right) = 1.$$

Erstaunlicherweise hilft uns hier die divergente harmonische Reihe weiter, denn es gilt

$$\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k+1}.$$

Diese Differenz zweier divergenter Reihen können wir auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{M-1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{M-1} - \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}\right)\end{aligned}$$

Wir erhalten daher für den reellen Teil

$$RT\left(\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k^2-1}\right) = RT\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Die Reihe konvergiert also, und es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Anmerkungen

1 Die Buchstaben M und N, gesprochen „groß Mü und groß Nü", stehen hier grundsätzlich für infinite natürliche, also hyperreelle Zahlen.

2 Beweis: Wenn $|q| < 1$ ist, gibt es zu jeder noch so kleinen positiven reellen Zahl r ein finites n, sodass gilt: $|q^n| < r$. Daher ist q^N für jedes infinite N kleiner als jede positive und größer als jede negative reelle Zahl.

Über den Gebrauch infiniter Vergrößerungen in der Analysis

von Helmut Wunderling

1. Vergrößerungstechnik

In einem Koordinatensystem (I) seien die Punkte *A*: (0; 0) und *B*: (0,001; 0,001) gegeben. Um beide Punkte zeichnerisch getrennt darstellen zu können, vergrößern wir in beiden Achsrichtungen z. B. mit dem Faktor 100. *A* und *B* liegen dann im System (II) auf gegenüber liegenden Ecken des neuen Einheitsquadrates.

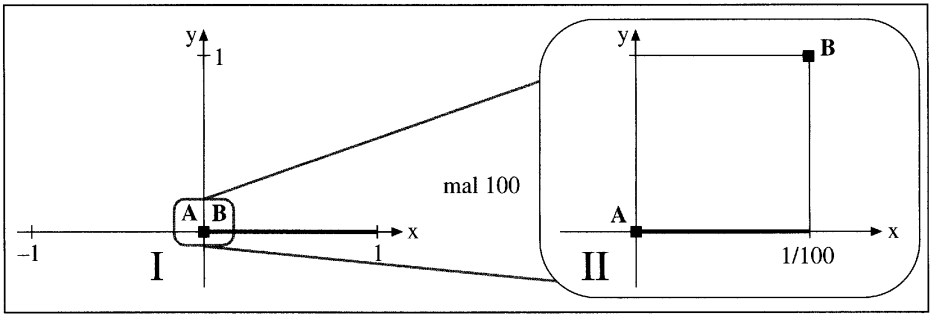


Abb. 1: Endliche Vergrößerung: Trennung von *A* und *B*

Verallgemeinert: *Wollen wir erreichen, dass die Maßstrecke, die ursprünglich die Länge 1 bedeutet, eine Länge* λ *darstellt, müssen wir mit dem Faktor* $\frac{1}{\lambda}$ *vergrößern.*

Diese Technik ist auch anwendbar, wenn wir die *infinitesimal benachbarten* Punkte *C*: (1; 1) und *D*: $(1 + \omega ; 1 - \omega)^1$ getrennt darstellen wollen. Möchten wir z. B. erreichen, dass die Maßstrecke $\frac{1}{2}\omega$ bedeutet, so muss der Vergrößerungsfaktor $\frac{1}{\frac{1}{2}\omega} = \frac{2}{\omega} = 2\Omega$ d. h. infinit sein. Auch wenn wir uns ein noch so großes endliches Ebenenstück zum Zeichnen vorstellen, sind im neuen Maßstab weder die Koordinatenachsen noch die Punkte *A* oder *B* – ja nicht einmal *irgendein* von *C* verschiedener Punkte mit mindestens einer reellen Koordinate – einzeichenbar; sie sind sämtlich unendlich fern. Umgekehrt lässt sich der Punkt *E*: $(1 + \omega^2; 1 - \omega^2)$ in der Vergrößerung 2Ω nicht von *C* trennen. Denn fragen wir uns, welchen Anteil *a* der Maßstrecke wir benötigen, die ja die Länge $\frac{1}{2}\omega$ hat, um den Abstand ω^2 zwischen 1 und $1 + \omega^2$ darzustellen – also $a \cdot \frac{1}{2}\omega = \omega^2$ –, so erhalten wir $a = 2\omega$, also einen infinitesimalen Anteil.

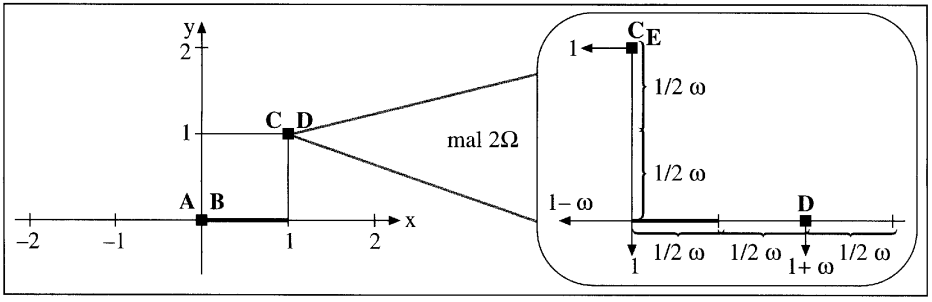


Abb. 2: Unendliche Vergrößerung: Trennung von *C* und *D*

Wollen wir C und E durch eine passende Vergrößerung, z. B. Ω^2, trennen, dann hätte die Maßstrecke die Länge ω^2 und ihr Anteil a, um den Abstand ω zwischen 1 und $1+\omega$ darzustellen – also $a \cdot \omega^2 = \omega$ – wäre $\frac{1}{\omega} = \Omega$, d. h. infinit. Auch D wäre von C und E in unendliche Ferne gerückt.

In der hyperreellen Ebene haben wir durch die Auswahl von Vergrößerungsfaktoren ein Mittel in der Hand, um Punkte
– auf einem (endlichen) Zeichenblatt zu trennen,
– aus jedem (endlichen) Zeichenblatt auszuschließen,
– so zusammen fallen zu lassen, dass kein endlicher Faktor sie zu trennen vermag.
Dieses Hilfsmittel existiert in der reellen Ebene nicht!

2. Beispiele infinit vergrößerter Funktionsgraphen

Wir vergrößern im Folgenden mit einem infiniten Faktor und betrachten einen bestimmten Punkt P eines Funktionsgraphen. Dadurch können wir infinitesimal benachbarte Punkte des Graphen sichtbar machen – vorausgesetzt, wir fassen die Funktion als eine hyperreelle auf. Um den vergrößerten Graphen analytisch einfacher beschreiben zu können, betrachten wir gleichzeitig ein durch P verlaufendes Hilfskoordinatensystem, das wir für infinitesimale Differenzen (oder *Differenziale*) dx bzw. dy heranziehen.

a) Graph zu $g(x) = 2x + 1$; Punkt P: (1; 3); Vergr. Ω.

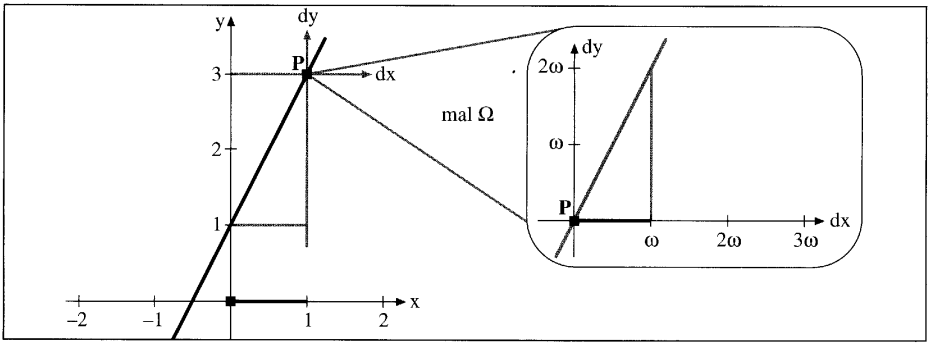


Abb. 3: Infinite Vergrößerung von Graphen

Für das Differenzial $dx = \omega$, das in der Vergrößerung als Streckeneinheit dargestellt wird, erhalten wir das Differenzial $dy = g(1 + \omega) - g(1) = (2(1 + \omega) + 1) - 3 = 2\omega$. $dy = 2 \cdot dx$ wäre auch direkt aus der Koordinatentransformation zu erkennen. Das Beispiel dient aber auch als Muster für die weiteren.

Wir halten vor allem als wichtig fest:

Satz 1 (Infinite Vergrößerung von Geraden)
Geraden bleiben bei infiniter Vergrößerung Geraden mit derselben Steigung.

b) Graph zu $p_2(x) = x^2$; Punkt P: (2; 4); Vergr. Ω.

Für $dx = \omega$ wird $dy = (2 + \omega)^2 - 4 = 4\omega + \omega^2$, wobei der Anteil ω^2 getrennt nicht dargestellt werden kann (vgl. hierzu Abschnitt 1). Für jedes Differenzial dx wird $dy = 4 \cdot dx + (dx)^2$ oder $dy = (4 + dx) \cdot dx$. Die Klammer $k := 4 + dx$ ist finit. Weil nur ihr reeller Teil 4 zeichnerisch relevant ist, gibt es zwischen dem lokalen Aussehen der Parabel und der Geraden mit $dy = 4dx$ keinen Unterschied.

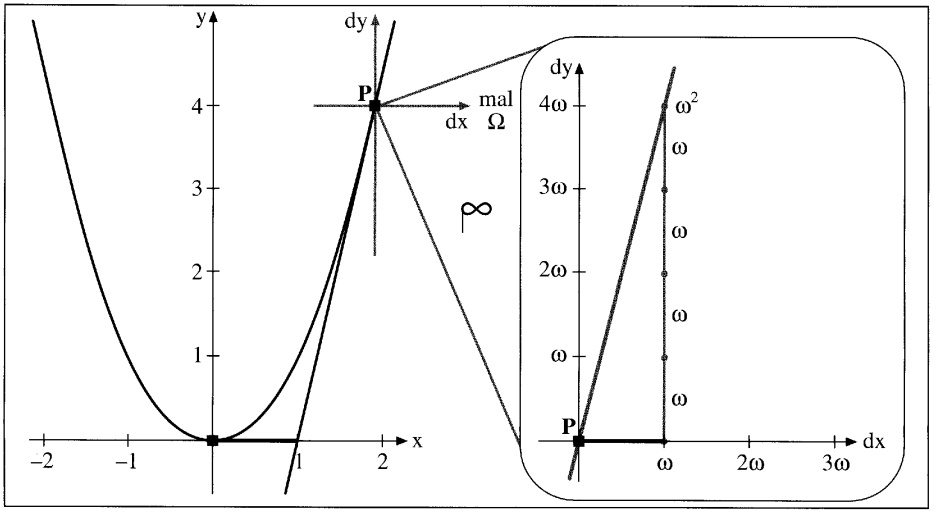


Abb. 4: Lokale Linearität der Parabel

Weil Geraden mit einer solchen Form ihrer Gleichung die Graphen *linearer* Funktionen sind, verabreden wir folgende Sprechweise:

Definition 1 (lokal linear)
Eine Funktion f (oder auch ihr Graph) heißt an einer Stelle x_0 lokal linear genau dann, wenn ihr (hyperreell erweiteter) Graph sich bei jeder infiniten Vergrößerung des Kurvenpunktes $(x_0, f(x_0))$ von einer Geraden zeichnerisch nicht unterscheidet, gleichgültig, wie groß der endliche Ebenenausschnitt für die Zeichnung auch gewählt wird.

In Verallgemeinerung unseres Beispiels haben wir dann

Satz 2 (Lokale Linearität der Parabeln)
Polynomfunktionen zweiten Grades sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs lokal linear.

c) Graph zu $w(x) = \sqrt{x}$; Punkt P: (0; 0); Vergr. Ω.

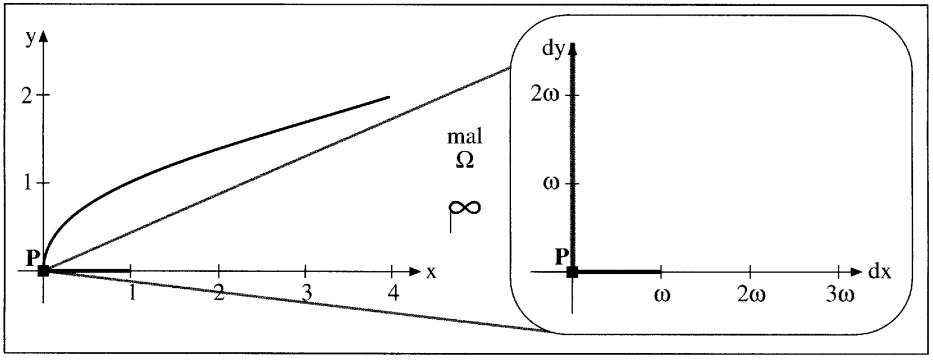


Abb. 5: Lokal gerade, doch nicht lokal linear!!

$dx = \omega$, also $dy = \sqrt{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \omega$. Wir können zu $dx = \omega$ das zugehörige dy nicht eintragen, denn wir müssten dazu die Einheitsstrecke der Länge ω mit dem infiniten Faktor $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ multiplizieren.

Wollen wir umgekehrt z. B. $dy = 3\omega$ erzwingen, d. h. $3\omega = \sqrt{dx}$ nach dx auflösen, so erhalten wir $dx = 9\omega^2 = (9\omega) \cdot \omega$, also einen infinitesimalen Anteil der Einheitsstrecke. Der Graph der Wurzelfunktion ist in P bei infiniter Vergrößerung von der positiven dy-Achse nicht zu unterscheiden. Obwohl also auch *gerade*, lässt er sich nicht als Graph einer linearen Funktion interpretieren. Daher ist die Wurzelfunktion im Ursprung nicht lokal linear.

d) Graph zu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; Punkt P:(0; 0); Vergr. $\Omega \cdot \pi$.

In diesem Fall ist $f(0)$ gar nicht definiert, also kein Punkt des Graphen. Dennoch ist er ein gutes Zentrum für eine infinite Vergrößerung – z. B. mit dem Faktor $\Omega \cdot \pi$. Die Einheitsstrecke bedeutet dann die Länge $\frac{1}{\Omega \cdot \pi}$ oder $\frac{\omega}{\pi}$. Mit $x_1 = \frac{\omega}{\pi}$ ergibt sich $f(x_1) = \sin(\Omega \cdot \pi) = 0$ – denn $\Omega \cdot \pi$ ist zwar infinit, aber ein „ganzzahliges" Vielfaches von π.[2] An der Stelle x_2, $x_2 = \frac{1}{(\Omega + 2)\pi}$ ist ebenfalls $f(x_2) = 0$ und dazwischen liegt eine volle Periode der Funktion, die Werte zwischen –1 und +1 liefert. Der Abstand $x_1 - x_2$ ist jedoch $\frac{2}{\Omega(\Omega + 2)\pi}$, d. h. der infinitesimale Anteil $a = \frac{2}{\Omega + 2}$ der Einheitsstrecke. Die beiden Stellen x_1 und x_2 lassen sich also bei dieser Vergrößerung nicht trennen; die eine herausgegriffene Periode des Graphen von f ist also von einer Vertikalen durch x_1 nicht zu unterscheiden. Zwischen zwei in der Vergrößerung endlich voneinander entfernten Stellen liegen dann sogar unendlich viele Perioden; jedes endliche Ebenenstück ist also durch den Graphen zeichnerisch vollständig bedeckt, weshalb der Ausschnitt in Abb. 6 – siehe oben auf der folgenden Seite – durchweg grau erscheint. (Der freigelassene Nullpunkt soll nur an den dort nicht definierten Graphen erinnern.)

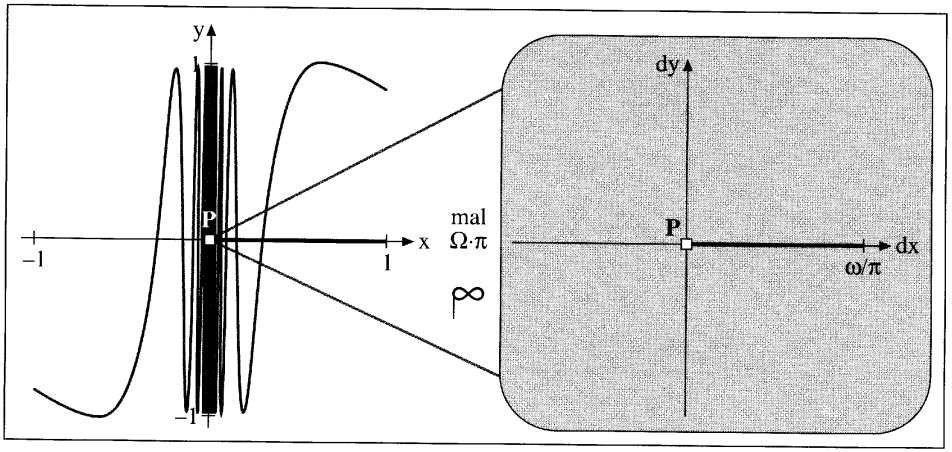


Abb. 7: Graph zu $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Wir können dieses extrem unschöne Verhalten bändigen, indem wir dafür sorgen, dass sich die Amplitude der Sinusfunktion am Ursprung nicht mehr auswirken kann. Wir ändern $f(x)$ ab zu $f_1(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Dann sieht der Graph bei infiniter Vergrößerung wie in Abb. 7 aus; er ist immer noch keine „Kurve", aber wenigstens bleiben für infinitesimale dx auch die dy infinitesimal.

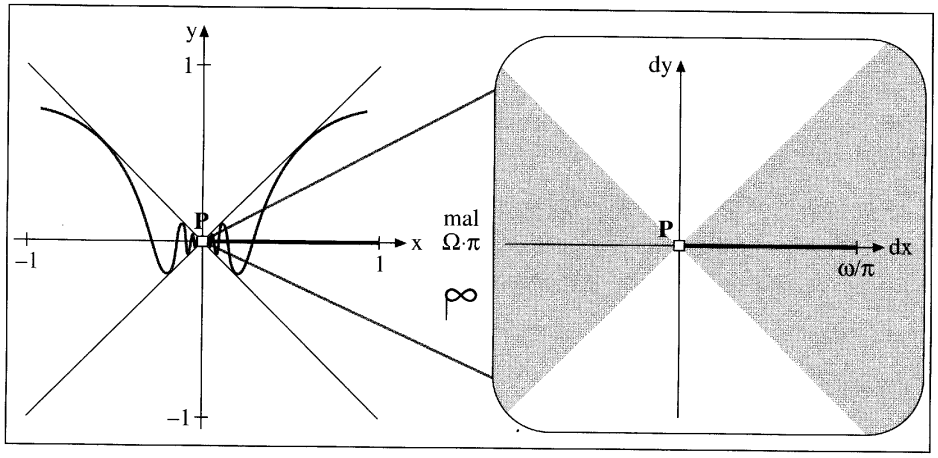


Abb. 7: Graph zu $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Durch den Faktor x^2 wird die Amplitude der Sinusfunktion parabolisch begrenzt: $f_2(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. In der infiniten Vergrößerung erscheint der Graph von f_2 als *punktierte* Gerade[3], weil beide Begrenzungsparablen lokal linear sind. f_2 wird selbst bei 0 lokal linear, wenn wir zusätzlich definieren $f_2(0) := 0$.

Mit denjenigen Funktionen, die lokal linear sind, befasst sich die Differenzialrechnung, sind sie doch die nächsteinfachen Funktionen nach den affinen, deren Bilder ja auch ohne infinites Vergrößern gerade sind.

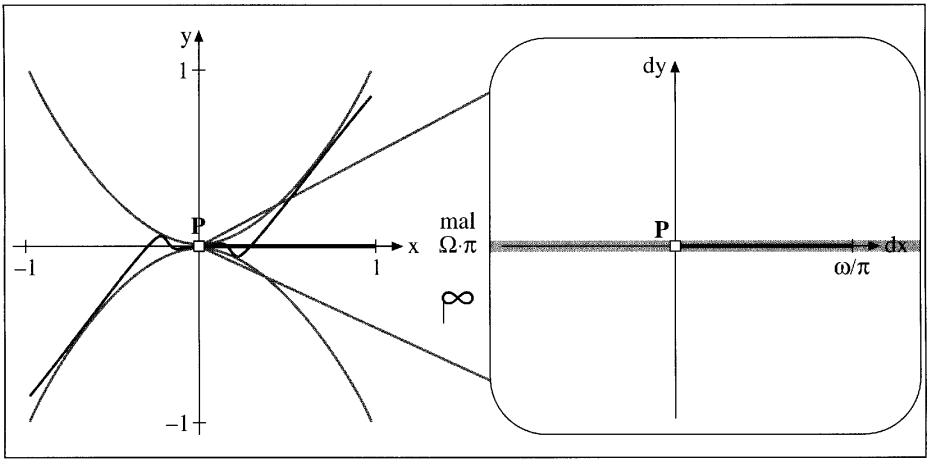


Abb. 8: Graph zu $x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. Nutzung infiniter Vergrößerung beim Differenzieren

Gegeben $f(x) = \sin(x)$, **gesucht** $f'(x)$
Behauptung: $\sin'(x) = \cos(x)$

Beweis (Niveau 0): Wir vergrößern mit einem infiniten Faktor und erhalten die Abbildung 9. Daraus wird direkt ersichtlich:

$$\sin'(x) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos(x),$$

denn bei infiniter Vergrößerung sehen wir stets genau das, was zum Differenzieren gebraucht wird – nicht mehr und nicht weniger!!

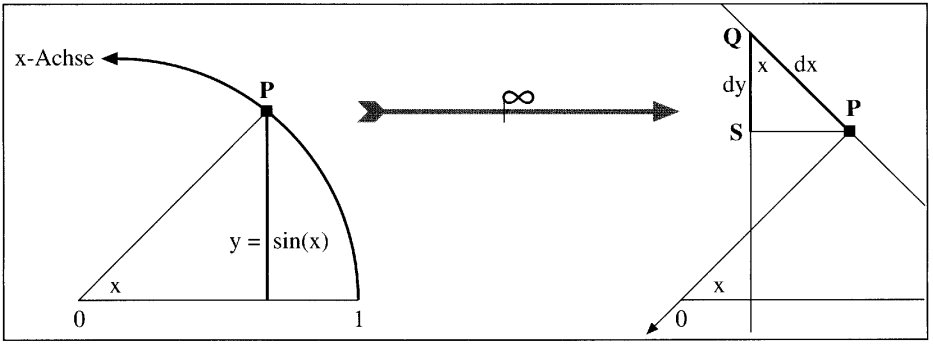


Abb. 9: Zur Ableitung des Sinus

Beweis (Niveau 1): Wir vergrößern mit einem infiniten Faktor ψ derart, dass $\psi \cdot dx = |\overline{PQ}|$, und erhalten

$$\sin'(x) = RT\left(\frac{dy}{dx}\right) = RT\frac{(\psi \cdot dy)}{(\psi \cdot dx)} = \frac{RT(\psi \cdot dy)}{RT(\psi \cdot dx)} = \frac{|\overline{QS}|}{|\overline{PQ}|} = \cos(x),$$

denn bei infiniter Vergrößerung sehen wir stets nur reelle Teile!!

Beweis (Niveau 2)[4]**:** Skeptiker meinen, dass die Kreiskrümmung sich doch irgendwie auswirken müsste. Daher betrachten wir die Abbildung 10, wo der „richtige" Kreispunkt R eingezeichnet ist. In der Tat wäre dann in der Vergrößerung $dy = |\overline{RS}|$ und dx die Länge des Bogens $\overset{\frown}{PR}$. Das Dreieck QRT wäre für den Fehler verantwortlich, den wir eventuell begehen. Da dieses bei Q den reellen Winkel x besitzt (wir wollen $x \neq 0$ voraussetzen), sind die Verhältnisse aller Seitenlängen a, b, c ebenfalls reell.

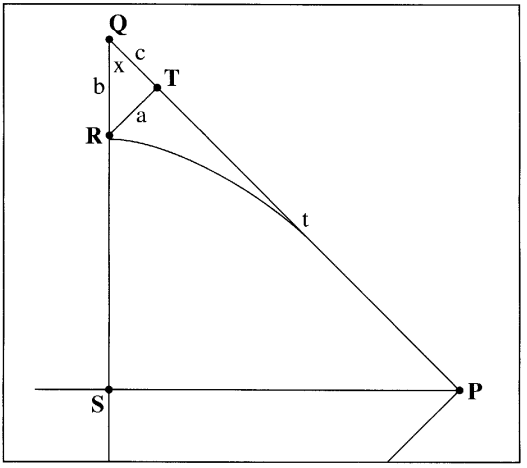


Abb. 10: Zur Ableitung des Sinus

Nun aber ist a als Abstand des Kreispunktes R vom Tangentenpunkt T infinitesimal im Vergleich zum Tangentenabschnitt $\overline{PT}$ mit der Länge t[5]. Somit sind alle drei Längen a, b, c infinitesimal bezüglich t. R und T sind also bei infiniter Vergrößerung wirklich nicht von Q zu unterscheiden.

Anmerkungen

1 ω ist die den Schülern bekannte infinitesimale Zahl, die durch die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ dargestellt werden kann; Ω entsprechend deren infiniter Kehrwert

2 $\Omega \cdot \pi$ wird durch die Folge $(n \cdot \pi)$ und $\sin(\Omega \cdot \pi)$ durch die Folge $(\sin(n \cdot \pi))$, d. h. durch die konstante Folge (0), beschrieben.

3 Gerade, die durch den Ursprung unterbrochen ist.

4 Für den 1. Quadranten.

5 Vgl. den Beitrag von Baumann in diesem Heft.

Schüler finden Differenziationsregeln selbst

von Helmut Wunderling

Vorweg: Liebe Leserin, lieber Leser, lesen Sie den Artikel bitte mit den Augen einer Schülerin oder eines Schülers, die noch nichts von Analysis wissen. Sie laufen sonst Gefahr, durch ihre automatisierten Assoziationen Grenzprozesse zu vermissen oder hineinzudenken; beides ist nach reichlicher Erfahrung unnötig irritierend. Vergleichen und bewerten Sie erst, wenn Sie den Artikel bereits gelesen haben.

1. Zum Konzept

Immer wieder frage ich mich, worin denn die Erleichterung liege, die beim Unterrichten der Analysis spürbar wird, wenn die Schüler Infinitesimalmathematik betreiben. Die Antwort bleibt stets dieselbe: durch die Nutzung der hyperreellen Zahlen werden die Schwierigkeiten entzerrt. Wenn nun aber die Schüler munter *mit*arbeiten, sollte es gelingen, ihre Eigenarbeit noch weiter zu steigern. Selbständig arbeiten Menschen im Allgemeinen gern, wenn sie Erfolg haben, sich in ihrem Arbeitsumfeld auskennen und Ziele wissen. Dies zu ermöglichen entstand als Konzept für den Unterricht in einer 11. Jahrgangsstufe:

- Verzicht auf anwendungsbezogene Motivationen (Vertrautsein der Schüler mit dem Arbeitsumfeld kann nur selten erreicht werden); statt dessen Vertrauen auf innermathematisches Motiviertsein der Schüler.
- *Alle aus der zurück liegenden Schulzeit bekannten reellen Funktionen sollen aus einer einzigen Grundfunktion konstruiert und ihre Graphen systematisch untersucht werden.* Mathematisches Projekt: Das scheint utopisch und ist es vielleicht doch nicht; Neugier ist die beste Motivation.
- Einführung der hyperreellen Zahlen erst dann, wenn die Schüler erkennen, dass außer den reellen Zahlen weitere Hilfsmittel notwendig sind.
- Nutzung der neuen Hilfsmittel zur Bearbeitung offener Probleme. Dies beinhaltet auch Auffinden von Differenziationsregeln.

2. Zum Projekt

Warum schreibe ich von diesem Projekt? Weil es über alle Erwartungen gut lief.

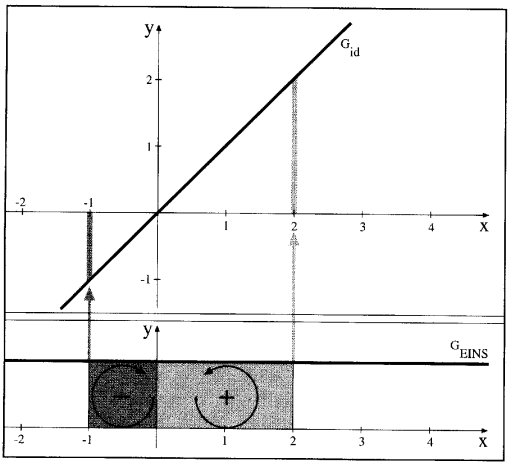
Also: Wir starteten in einem Klima voller Neugier mit der EINS-Funktion:

$EINS: \mathbb{R} \to \{1\}$,

$x \mapsto y$ mit $y = EINS(x) := 1$

Ihr Graph G_{EINS} ist fast langweilig einfach, aber wenn wir jetzt, beim Ursprung beginnend, zu jedem x das zugehörige (orientierte) Rechteck aufsuchen und dessen Flächeninhalt berechnen, so erhalten wir bereits eine neue Funktion, die Identität.

Das überrascht, Integration steht gleich am Anfang im Sinne von es gibt „Flächeninhaltsfunktionen".



Was mit *EINS* geht, geht auch mit *DREI*, sofort können die Schüler „integrieren" üben und ferner eine zweite Erzeugungsmethode erkennen, denn *DREI* = 3 · *EINS*, die *s*-Multiplikation. Durch Kombination dieser wenigen Methoden haben wir bereits alle konstanten und die linearen Funktionen systematisiert. Die Schüler fühlen sich sicher, wiederholen und üben in neuem Umfeld und wissen, „wo es lang geht". Doch ich will nicht sofort mitziehen, denn Operationen taugen nicht viel, wenn man sie nicht auch rückgängig machen kann.

Abb. 1: Zur Integration

Das Integrieren machte aus *EINS* die Identität *id*, aus *DREI* die lineare Funktion 3 · *id*. Wie kommen wir wieder zurück? Die Schüler *er*finden die „Steigungsfunktion" und sind sehr zufrieden, dass dieses „Differenzieren" dem ganzen späteren Neuland den Namen geben wird.

Nun kommen die Schüler zum Zuge, und wir definieren eigentlich nur alle „Funktionsrechenarten" und zeichnen dazu. Alles war eigentlich schon bekannt, aber es wird nach einheitlichen Gesichtspunkten geordnet, und die Begriffe werden geschärft. Und es wird nicht langweilig, denn auch unter den Schülern gibt es genug „Vollständigkeitsfanatiker"; und so kommen auch noch Funktionsumkehrung und -verkettung dazu. Zum Glück hat keiner an die Sinusfunktion gedacht!

3. Erste Abänderung durch die Schüler

Die „Systematisierungssucht" hat die genauere Untersuchung der Funktionstypen hintenan gesetzt. So kommen die Hausaufgaben über affine Funktionen in Konflikt mit den Erzeugungsmethoden, die dafür eigentlich gar nicht notwendig sind. Meine Standardaufgabe:

„Gegeben sind zwei affine Funktionen f und g mit den Gleichungen

$f(x) = m_f x + n_f$ und $g(x) = m_g x + n_g$.

Untersuche, was s-Multiplikation, Funktionsaddition usw. daraus machen!"

zielt eigentlich auf die Vektorraumstruktur (natürlich ohne diesen Terminus), das „usw." wurde als unüberlegte Floskel auf entsprechende Schülernachfrage „und die anderen Methoden?" angehängt.

Und nun die Überraschung: Die Schüler bezogen das Differenzieren ganz natürlich mit ein[1], und die Sammlung aller Ergebnisse ergab:

Jede affine Funktion f besitzt eine konstante Steigungsfunktion f' und es gilt

$f' = m_f$.

Die aus f und g gebildeten Summen-, Differenzen- und Verkettungsfunktionen f + g, f − g und f o g sind sämtlich wieder affine Funktionen, und es gilt für deren Steigungen:

$m_{f+g} = m_f + m_g$,
$m_{f-g} = m_f - m_g$,
$m_{f\,o\,g} = m_f \cdot m_g$

Ist r eine reelle Zahl, so sind auch die durch s-Multiplikation entstehende Funktion rf und die Umkehrfunktion f^{-1} wieder affine Funktionen, und es gilt für ihre Steigungen:

$$m_{rf} = r \cdot m_f,$$

$$m_{f^{-1}} = \frac{1}{m_f}$$

Die aus f und g gebildeten Produkt- und Quotientenfunktionen $f \cdot g$ und f/g sind keine affinen Funktionen, also gibt es auch keine Steigungen.

4. Fortsetzung des Projekts

Selbstverständlich nimmt die Parabeluntersuchung eine wichtige Stelle im Projekt ein. Symmetrie und Scheitelpunkt fallen ja sofort auf, und die Frage ist spannend, ob der Graph jeder Polynomfunktion zweiten Grades diese Eigenschaften besitzt. Wir können schließlich die Lage des Scheitelpunktes auf mehreren Wegen bestimmen – denn die verallgemeinerungsfähige Methode „Tangentensteigung NULL" soll gut verankert werden.

Die Frage nach dem Namen *Parabel*[2] führt zum Brennpunkt – und dort muss es heiß sein. Also führen wir die Parabel durch ein physikalisches Experiment ein: ein Spiegel wird durch ein paralleles Strahlenbündel per Schülerhand so geführt, dass der reflektierte Strahl stets durch einen Punkt verläuft.

Dem Leser sei überlassen, sich die Parabeleigenschaften zu vergegenwärtigen, die das Experiment für den entsprechenden Funktionstyp ergibt. Es ist dann klar, dass aus der Brennpunktuntersuchung dieses Ergebnis folgt:

Gegeben seien eine quadratische Funktion q mit der Gleichung $q(x) = ax^2$, wobei $a \neq 0$ ist, und ein Punkt P der zugehörigen Parabel. Für die Steigung m_P der Stellung des Spiegels im Punkte P ergibt sich:

$$m_P = \frac{y_P}{\frac{1}{2}x_P} = \frac{ax_P^2}{\frac{1}{2}x_P} = 2ax_P.$$

Der Scheitelpunkt *S* ist derjenige Punkt, wo der reflektierte Lichtstrahl vom eintretenden nicht zu unterscheiden ist, also muss $m_s = 0$ gelten, also $x_s = 0$; nicht besonders aufregend.

5. Zweite Abänderung durch die Schüler

Wie kann das Ergebnis auf beliebige quadratische Funktionen p_2 mit $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ ausgedehnt werden?

Meine Idee war eine Übertragung mittels Koordinatentransformation, was für die Schüler nicht neu gewesen wäre. Doch sie wollten es anders und argumentierten wie folgt: p_2 ist die Summe aus einer einfachen quadratischen Funktion *q* und einer affinen *f* mit $f(x) = bx + c$. Für Geraden kennen wir die Summenregel für die Steigungen. Eine Parabel besteht aber auch aus lauter geraden Spiegeln – wir einigten uns wenigstens auf „Minispiegel", woraus dann im Verlaufe „Minitangenten" wurden –, also muss das Ergebnis lauten:

$$m_p = 2axp + b$$

Innerlich hocherfreut spiele ich den Skeptiker, doch $m_s = 0$ liefert das altbekannte

$$x_S = -\frac{b}{2a}.$$

Wir haben zum ersten Mal nicht trivial differenziert, denn wir sind von $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ zu einer daraus abgeleiteten Funktion p_2' mit $p_2'(x) = 2ax + b$ gelangt. Die Vorstellung der „Minitangenten" reichte dazu aus, quadratische Funktionen haben sich als *differenzierbar* erwiesen!

Nun bedarf es nur eines kleinen Anstoßes und wir formulieren als Verallgemeinerung aus Abschnitt 3. den Satz:

Sind f und g und die daraus gebildeten Verknüpfungen sämtlich differenzierbar, dann gelten für die Ableitungsfunktionen folgende Regeln:

$(f+g)' = f' + g'$, Summenregel

$(f-g)' = f' - g'$, Differenzregel

$(f \circ g)' = f' \cdot g'$, Kettenregel

$(rf)' = r \cdot f'$, Faktorregel ($r \in \mathbb{R}$)

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, Umkehrregel (y=f(x))

Animiert dadurch denke ich: Wenn doch quadratische Funktionen aufgenommen sind in die Gruppe von Funktionen, für die Steigung kein Problem ist, müßte nicht auch die Produktregel hier schon sichtbar werden?

Wir gehen dazu von zwei affinen Funktionen f und g mit den Gleichungen

$f(x) = m_1x + n_1$ und $g(x) = m_2x + n_2$

aus. Die Produktfunktion $f \cdot g$ hat dann die Gleichung

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (m_1x + n_1)(m_2x + n_2) = m_1m_2x^2 + (m_1n_2 + m_2n_1)x + n_1n_2.$$

Es handelt sich dabei um eine Polynomfunktion zweiten Grades, deren Steigungsfunktion wir bereits kennen. Daher erhalten wir

$$(f \cdot g)'(x) = 2m_1m_2x + m_1n_2 + m_2n_1;$$

oder umgestellt:

$$(f \cdot g)'(x) = m_1(m_2x + n_2) + m_2(m_1x + n_1).$$

In den Klammern stehen gerade die Terme $g(x)$ und $f(x)$. Weil wir wieder die Verallgemeinerung auf beliebige differenzierbare Funktionen ausdrücken wollen, schreiben wir $f'(x)$ statt m_1 bzw. $g'(x)$ statt m_2 und erhalten:

Sind f, g und die daraus gebildete Produktfunktion sämtlich differenzierbar, dann gilt für die Ableitungsfunktionen folgende Regel:

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ (Produktregel)

Wie unglücklich würde ich mich jetzt fühlen, wenn ich gezwungen wäre, den Tangentenbegriff durch Sekantengrenzübergang zu „präsentieren"! Und ich freue mich, dass es die hyperreellen Zahlen mit ihren Möglichkeiten gibt.

6. Fortsetzung des Projekts

Trotz der langen Beschäftigung mit den quadratischen Funktionen geht in einem Projekt der rote Faden nicht verloren. Die kubischen Parabeln erweisen sich zwar alle als punktsymmetrisch, der Wendepunkt lässt sich dann leicht bestimmen, aber Hoch- und Tiefpunkte machen unüberwindliche Schwierigkeiten. Selbst Computerprogramme wie DERIVE – sonst oft hilfreich – versagen. Wir brauchen stärkere Hilfsmittel! Die gibt es: hilfreiche neue Zahlen.

Wie im Artikel von P. Baumann beschrieben, werden die hyperrellen Zahlen soweit eingeführt, wie es zum Arbeiten in der Schule nötig ist. Wir kommen zur Vergrößerungstechnik und beschreiben die „Minitangenten-Eigenschaft" durch den Begriff der lokalen Linearität (vgl. den entsprechenden Artikel in diesem Heft).

Jetzt kann jede der Regeln aus Abschnitt 5 von der (unbrauchbaren!) Bedingung befreit werden, dass mit f und g auch deren Verknüpfung differenzierbar, d. h. lokal linear, sein muss. Denn wir zeigen einfach, dass z. B. $f + g$ diese Eigenschaft bereits von f und g übernimmt. Die Regel selbst haben wir bereits. Wir schreiben (mit nahe liegenden Bezeichnungen für die hyperreell erweiterten Funktionen) also hin:

Voraussetzung: $dy_f = k_f \cdot dx$, $dy_g = k_g \cdot dx$ und $s := f + g$

Behauptung: $dy_s = k_s \cdot dx$

Beweis (Stufe 0): Von denjenigen Schülern, die sich daran erinnern, wie es mit der Addition bei Geraden war, zweifelt niemand, denn wie soll beim Addieren aus zwei Geraden in der infiniten Vergrößerung etwas anderes als eine Gerade werden! Aber sind da nicht Abweichungen!? Die sind infinitesimal; und die Summe zweier infinitesimaler Zahlen ist es doch auch! (Es gibt jedoch auch Unsicherheit in der Gruppe.)

Beweis (Stufe 1): Es ist $dy_s = dy_f + dy_g = k_f \cdot dx + k_g \cdot dx = (k_f + k_g) \cdot dx$. Die Klammer ist als Summer zweier finiter Zahlen wieder finit, also fertig. Halt! Mussten diese finiten Zahlen nicht noch eine Bedingung erfüllen?

Beweis (Stufe 2): Die Faktoren k können von der Wahl des dx abhängen, dann aber so, dass nur der infinitesimale Teil davon betroffen ist. Also $k_f(dx) = (r_f + \alpha_f(dx))$ und $k_g(dx) = (r_g + \alpha_g(dx))$. Dann aber gilt dasselbe auch für k_s, denn

$k_s = ((r_f + r_g) + (\alpha_f(dx) + \alpha_g(dx))$.

Und wieso kann man $dy_s = dy_f + dy_g$ sagen? Geht das auch ohne Hilfe einer infiniten Vergrößerung? Ist es sicher, dass man bei anderen Funktionszusammensetzungen ähnlich verfahren darf?

Beweis (Stufe 2a): Genau genommen ist

$$\begin{aligned} dy_s &= s(x + dx) - s(x) = (f + g)(x + dx) - (f + g)(x) \\ &= f(x + dx) + g(x + dx) - f(x) - g(x) \\ &= f(x + dx) - f(x) + g(x + dx) - g(x) \\ &= dy_f + dy_g. \end{aligned}$$

Und zum Schluss: Falls jemand „vergessen" haben sollte, wie die Formel für die Summenregel lautet – sie ist in unseren Rechnungen versteckt!

Beweis (Stufe 3): Ach ja, für unsere reellen Summenfunktion ist nur der reelle Teil der finiten Steigung wichtig!

$$s'(x) = RT(k_s) = RT((r_f + r_g) + (\alpha_f + \alpha_g)) = r_f + r_g = f'(x) + g'(x)$$

Das ist hier nicht so wichtig, aber wenn neue Regeln gefunden werden sollen ...

7. Schülereigenarbeit

Um das Ziel zu erreichen, Hoch- und Tiefpunkt einer kubischen Parabel zu bestimmen, wollen wir $x^3 = x^2 \cdot x$ ausnutzen. Ob die Produktregel wohl gilt? Aus Geraden wird doch beim Multiplizieren etwas Krummes! Das genügt, um der Hausaufgabe Sinn zu verleihen: *beweise die Produktregel*! Als Hilfe gebe ich Abb. 2.

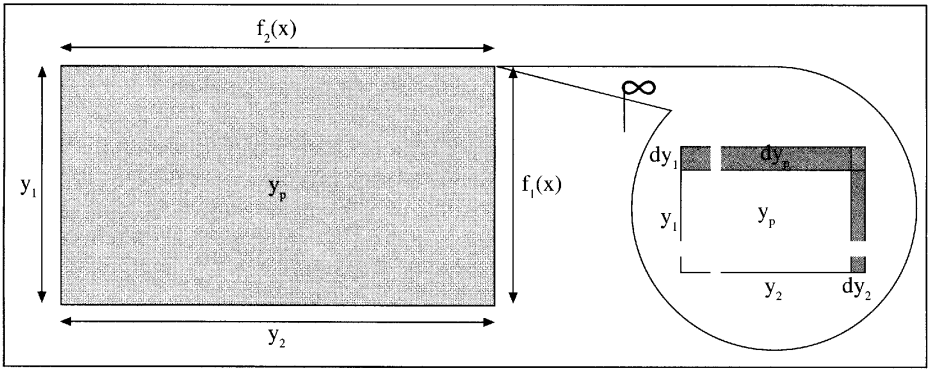


Abb. 2: Zur Produktregel

Eine Schülerin stellt ihre Lösung in der nächsten Stunde vor:

Produktregel $(p := f_1 \cdot f_2)$

$$p' = (f_1 \cdot f_1)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2',$$

falls f_1 und f_2 differenzierbar sind.

Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass p differenzierbar ist.

Voraussetzung:	f_1 ist differenzierbar, d. h. $dy_1 = k_1 \cdot dx$;	k_1 ist finit,
	f_2 ist differenzierbar, d. h. $dy_2 = k_2 \cdot dx$;	k_2 ist finit.
Behauptung:	p ist differenzierbar, d. h. $dy_p = k_p \cdot dx$;	k_p ist finit.
Beweis:	$y_p = y_1 \cdot y_2$	

Sie zeichnet in der Vergrößerung aus Abb. 2 nur den „Rand", der das Differenzial dyp darstellt, und fährt fort:

$$\begin{aligned} dy_p &= y_1 \cdot dy_2 + y_2 \cdot dy_1 + dy_1 \cdot dy_2 \\ &= y_1 \cdot k_2 \cdot dx + y_2 \cdot k_1 \cdot dx + k_1 \cdot dx \cdot k_2 \cdot dx \\ &= (y_1 \cdot k_2 + y_2 \cdot k_1 + k_1 \cdot dx \cdot k_2) \cdot dx \end{aligned}$$

Weiter kommt sie nicht, denn die Frage kritischer Mitschüler/innen: „Wieso ist die Klammer finit?" kann sie nicht beantworten; und die Frager auch nicht! Schuld ist der Lehrer, denn alle Typenkombinationen von infinitesimal, reell und infinit waren für die Grundrechenarten durchgespielt worden[3], nur finite Zahlen waren nicht thematisiert; sie wären in dem eigentlich vorgenommenen Konzept $f'(x) := RT\left(\frac{dy}{dx}\right)$ auch nicht explizit

vorgekommen. So hat geringfügiges Nichtwissen den Erfolg der guten Schüler behindert; für andere genügte die noch hastig hinzugefügte Zeile $dy_p = k_p \cdot dx$ (sieht doch so aus wie die Behauptung).
Aber die Aufforderung, eben trotzdem weiter zu rechnen, denn die hoffentlich finite Zahl müsste ja sowieso noch eine Eigenschaft haben, verhalf zum Abschluss.

Die Hauptkritikerin schreibt an die Tafel und kommentiert richtig:

$$k_p = y_1 \cdot (r_2 + \alpha_2) + y_2 \cdot (r_1 + \alpha_1) + (r_1 + \alpha_1) \cdot dx \cdot (r_2 + \alpha_2)$$
$$= [y_1 \cdot r_2 + y_2 \cdot r_1] + [y_1 \cdot \alpha_2 + y_2 \cdot \alpha_1 + (r_1 + \alpha_1) \cdot dx \cdot (r_2 + \alpha_2)]$$
$$= r_p + \alpha_p(dx)$$ ist finit mit von dx unabhängigem reellen Teil.

Bei allen anderen bisher angesprochenen Differenziationsregeln waren die Erfahrung mit Geraden und der Begriff der lokalen Linearität hinreichender Beweis. Was soll z. B. bei der Umkehrregel plötzlich in einer infiniten Vergrößerung nicht mehr gerade sein, wenn wir die Sichtweise lediglich umkehren? Hier muss auch wirklich nur die Null-Frage geklärt werden, wie die Vergrößerung des Graphen der Wurzelfunktion am Ursprung zeigt (vgl. das Bild im Artikel über infinite Vergrößerungen).

8. Nachwort

Die Schüler haben zu jeder Stunde reihum je ein unzensiertes Protokoll geschrieben. Dadurch gelingt es recht genau, den Stand des Verstehens abzuschätzen. Sie wussten allerdings, dass sie damit ihr eigenes Lehrbuch zusammen stellten, das Mitschülern auch bei Fehlzeiten oder sonstigen Schwierigkeiten helfen sollte. Viele haben sich dabei auch große Mühe gegeben; die Darstellung in Abschnitt 7 stützt sich auf ein solches Protokoll.

Das Projekt endet hier, steht doch ein mächtiges Werkzeug zur Kurvenuntersuchung zur Verfügung, ohne dass „Kurvendiskussion" betrieben worden wäre. Für den weiteren Unterricht macht es keinen Unterschied, ob Infinitesimalmathematik herangezogen wird oder nicht; er ist deshalb auch nicht mehr unser Thema. Ich wollte hier nur zeigen, dass ganz normaler Unterricht in einer 11. Jahrgangsstufe so organisiert werden kann, dass große Schüleraktivität möglich wird. Und dazu ist nach meinen Erfahrungen das Konzept der Infinitesimalmathematik im Vergleich zu dem der Grenzwertanalysis die leichtere Alternative.

Anmerkungen

1 Das Integrieren war kaum erfolgreich, denn die Inhaltsformel für Trapeze war schon bei Zahlenbeispielen eine Bremse.
2 Griech. Gleichnis; vgl. RingParabel in „Nathan der Weise".
3 Vgl. auch den Artikel von P. Baumann in diesem Heft.

Bemerkungen über die Mächtigkeit verschiedener (interner) Teilmengen von $\mathbb{H}$

von Bernhard Steinig

In diesem Beitrag soll untersucht werden, welche Kardinalzahlen folgende interne Teilmengen von $\mathbb{H}$ haben, nämlich die Menge aller hypernatürlichen Zahlen $^*\mathbb{N}$, hyperendliche Mengen und schließlich beschränkte abgeschlossene Intervalle.

Wir betrachten

(i) $$^*\mathbb{N},$$

die Menge aller hypernatürlichen Zahlen (der vorangestellte Stern bedeutet, dass es sich um eine Nichtstandarderweiterung einer Menge aus der reellen Welt handelt, sprachlich ausgedrückt durch die Vorsilbe „hyper“);

(ii) $$A_\Omega := \{1; 2; \ldots; \Omega\}$$

als ein Beispiel für eine hyperendliche Menge, dabei ist $\Omega \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ eine beliebige, unendlich große hypernatürliche Zahl;

(iii) $$^*[0; 1] \subset \mathbb{H},$$

das beschränkte abgeschlossene Hyperintervall $^*[0;1]$.

Zunächst soll darauf hingewiesen werden, dass es stets zu unterscheiden gilt, ob die interne oder die externe Kardinalzahl gemeint ist – analog der Unterscheidung zwischen internen und externen Mengen. Gemäß dem Übertragungsprinzip können wir sagen, dass die Menge (i) den Prototyp einer „hyperabzählbaren unendlichen“ Menge darstellt, dass die Menge (ii) die Kardinalzahl Ω hat, während die Menge (iii) (das „Hyperkontinuum“) dieselbe Kardinalzahl wie $\mathbb{H}$ hat.

Interessanter ist jedoch die Frage, welche externe Kardinalzahl diese internen Mengen haben – im weiteren stets mit *card(X)* bezeichnet. Dazu sollen die folgenden Abschätzungen bewiesen werden:

$$card(\mathbb{R}) \leq card([0|1]) \tag{1}$$

$$card([0|1]) \leq card(A_\Omega) \tag{2}$$

$$card(A_\Omega) \leq card(^*\mathbb{N}) \tag{3}$$

$$card(^*\mathbb{N}) \leq card(^*[0|1]) \tag{4}$$

$$card(^*[0|1]) \leq card(\mathbb{H}) \tag{5}$$

$$card(\mathbb{H}) \leq card(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \tag{6}$$

$$card(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \leq card(\mathbb{R}) \tag{7}$$

Daraus ergibt sich dann, dass diese Teilmengen alle – unter externen Gesichtspunkten – die Kardinalzahl *card*($\mathbb{R}$) haben.

Beweis:
(1) Dieser Sachverhalt ist wohlbekannt.

(2) In der Standardwelt gilt für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage:
Zu jedem $a \in [0|1]$ gibt es ein $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ mit

$$\left| a - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{1}{n} .$$

Nach dem Übertragungsprinzip gilt dann für jedes $\Omega \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$:
Zu jedem $a \in {}^*[0|1]$ gibt es ein $k \in \{1; \ldots; \Omega\}$ mit

$$\left| a - \frac{k}{\Omega} \right| \leq \frac{1}{\Omega} .$$

Wird jetzt zu jedem $a \in [0|1]$ eine entsprechende Zahl $k_a \in \{1; \ldots; \Omega\}$ mit

$$\left| a - \frac{k_a}{\Omega} \right| \leq \frac{1}{\Omega}$$

gewählt, so ist die Abbildung

$$\varphi : a \mapsto k_a ; \qquad [0|1] \to A_\Omega$$

injektiv.

(3) Dies gilt offensichtlich wegen $A_\Omega \subset {}^*\mathbb{N}$.

(4) Die Abbildung

$$\psi : k \mapsto \frac{k}{k+1} ; \quad {}^*\mathbb{N} \to {}^*[0|1]$$

ist injektiv.

(5) Dies gilt offensichtlich wegen ${}^*[0|1] \subset \mathbb{H}$.

(6) Jede hyperreelle Zahl hat eine Darstellung als eine Folge reeller Zahlen.

(7) Dies ist eine wohlbekannte Tatsache, die hier nicht bewiesen werden soll. (Für den Beweis vergleiche man zum Beispiel: Klauer, D.: Mengenlehre. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1979, S. 262.)

Register des Jahrgangs 42/1996

Hefte des Jahrgangs 42/1996

Heft 1: Optimale Entscheidungen
(verantw. Dietrich Meyer)

Heft 2: Symmetrisieren
(verantw. Hans Schupp)

Heft 3: Anregungen zu historischen Exkursionen II
(verantw. Peter Baptist)

Heft 4/5: Übergänge III: Von der Sekundarstufe II zur Hochschule
(verantw. Martin Glatfeld)

Heft 6: Dialoge mit dem Grafikrechner im Analysisunterricht
(verantw. Günter Steinberg)

Verzeichnis der in den Heften 1–6 erschienenen Aufsätze

Heft 1: Optimale Entscheidungen

Dynamische Optimierung. **(Dietrich Meyer)** Seite 5

Stochastische Lineare Optimierung. **(Dietrich Meyer)** Seite 18

Spieltheorie: interdisziplinär und anwendungsbezogen. **(Nicola Haas und Angela Müller)** Seite 35

Exaktifizieren im Mathematikunterricht – am Beispiel des Begiffes „besser". **(Hans Humenberger)** Seite 71

Heft 2: Symmetrisieren

Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe. **(Peter Kirsche)** Seite 5

Symmetrisieren durch Iterieren. **(Hans Schupp)** Seite 16

Symmetrische Fraktale. **(Herbert Zeitler)** Seite 30

Symmetrie und die Konstruktion regulärer Polygone. **(Peter Hilton und Jean Pedersen)** Seite 46

Heft 3: Anregungen zu historischen Exkursionen II

Thales von Milet. **(Harro Heuser)** Seite 5

Der Satz des Pythagoras – eine „qualitas occulta"?. **(Peter Baptist)** Seite 22

Leonardo Pisanos *Liber abbaci.* **(Heinz Lüneburg)** Seite 31

Was machte Nicolo Tartaglia in der Nacht zum Aschermittwoch des Jahres 1523 in Verona?. **(Heinz Lüneburg)** Seite 43

Srinivasa Ramanujan Iyengar: Aus Leben (und Werk) eines genialen Mathematikers – ein Gespräch. **(Albrecht Beutelspacher)** Seite 49

Ein einfacher Beweis der Berührreigenschaft des Feuerbachkreises eines Dreiecks. **(Roland Stärk)** Seite 67

Heft 4/5: Übergänge III: Von der Sekundarstufe II zur Hochschule

Die Verschiebung der „Grenzen" – Konflikte zwischen Schulen und Hochschulen. **(Gert Schubring)** Seite 7

Mathematik als Schulung des Geistes. **(Klaus Roggenkamp)** Seite 20

Die Mathematik – mehr als nur ein notwendiges Übel in den Wirtschaftswissenschaften. **(Rüdiger Bücker)** Seite 35

Anmerkungen zur Lücke zwischen Schul- und Hochschulmathemnatik. **(Günther Richter)** Seite 39

Erfahrungen mit der fachwissenschaftlichen Lehrveranstaltung im Studiengang „Lehramt für die Primarstufe" mit Mathematik als weiterem Fach. **(Martin Glatfeld)** Seite 46

Möglichkeiten für Beziehungen zwischen Schule und Hochschule. **(Rudolf Fritsch)** Seite 62

Über die Bedeutung eines problem- und anwendungsorientierten Mathematikunterrichts für den Übergang zur Hochschule. **(Uwe Tietze und Frank Förster)** Seite 85

Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. **(Hans Werner Heymann)** Seite 107

Drei Perlen der Mathematik. **(Klaus W. Roggenkamp)** Seite 121

Heft 6: Dialoge mit dem Grafikrechner im Analysisunterricht

Die Behandlung von Folgen unter Einsatz des graphikfähigen Taschenrechners – eine Unterrichtseinheit in Klasse 11. **(Heiko Knechtel)** Seite 4

Kurven sind mehr als Graphen von Funktionen. **(Günter Steinberg)** Seite 26

Gedanken zum Erwerb der grundlegenden Begriffe der Analysis unter Verwendung von Computern und graphikfähigen Taschenrechnern (gTR). **(Andreas Meißner)** Seite 42

Mathematische Konflikte mit dem graphikfähigen, programmierbaren Taschenrechner. **(Karel Tschacher)** Seite 61

PRAXIS DEUTSCH

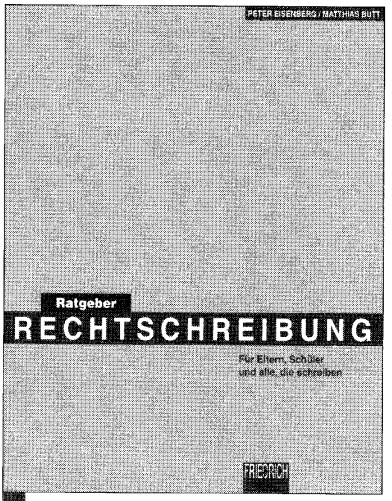
RATGEBER RECHTSCHREIBUNG

FÜR ELTERN, SCHÜLER UND ALLE, DIE SCHREIBEN

■ Alle sprechen von der Rechtschreibreform und damit von der Rechtschreibung. Und das zu Recht, denn über kurz oder lang wird jeder mit den Folgen der Reform in Berührung kommen. Wir werden Wörter lesen, die wir so bisher nicht gesehen haben und werden uns beim Schreiben immer wieder fragen, was noch richtig ist und was falsch.

Der **Ratgeber Rechtschreibung** gibt Auskunft über die Grundregeln unserer Rechtschreibung. Er verbindet die Neuregelungen der Reform mit dem, was bisher galt und weiter gelten wird. Die Reform ist Anlass für einen Blick auf das Ganze. Man kann verstehen, was jetzt gilt, auch wenn man sich in manchen Fällen über die alte Regelung nicht genau im Klaren war, und man sieht, was in Zukunft nicht mehr erlaubt sein soll. Wir möchten einsichtig und verständlich machen, wie unsere Orthographie funktioniert. Sie ist insgesamt überraschend einfach und logisch aufgebaut. Mit sehr wenigen Grundregeln, die dargestellt und erläutert werden, wird man den normalen Anforderungen in normalen Texten vollständig gerecht.

Über Neuregelungen in der Wortschreibung insgesamt gibt die Wortliste schnell und übersichtlich Auskunft. Die Liste enthält alle Wörter des Grundwortschatzes, deren Schreibung sich durch die Reform ändert.



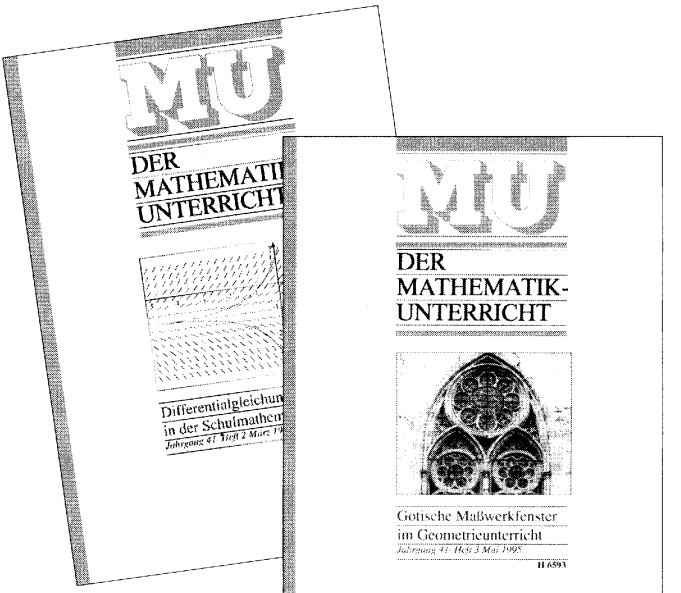
Autoren: Peter Eisenberg/ Matthias Butt, 32 Seiten DIN A4, Bestell-Nr. 92143, DM 6,90 zzgl. Versandkosten. Stand 1997

FRIEDRICH VERLAG *Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett*

DER MATHEMATIKUNTERRICHT

FÜR PÄDAGOGEN UND FACHWISSENSCHAFTLER

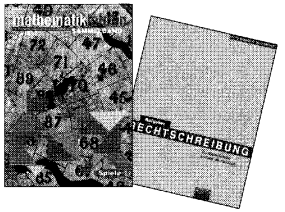
Der Mathematik-Unterricht bringt den LehrerInnen Impulse zur fachinhaltlichen und fachdidaktischen Gestaltung. Die Zeitschrift zeigt Entwicklungen in der mathematischen Forschung in Hinblick auf ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht auf.
Die Beiträge sind unterrichtsbezogen, keinesfalls aber als rezeptartige Unterrichtsvorbereitungen zu verstehen. **Der Mathematik-Unterricht** möchte Ihnen neue Anregungen und Impulse für Ihren Unterricht geben.



DER MATHEMATIKUNTERRICHT
erscheint 12 x jährlich,
Jahresabonnementpreis 1997
DM 139,60 zzgl. Versandkosten.

FRIEDRICH VERLAG *Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett*

EINZELHEFTE UND MATERIALIEN FÜR IHREN UNTERRICHT:



Ich wünsche ein kostenloses Gesamtverzeichnis für meine Unterrichtsfächer:

_____ / _____ / _____

Ich unterrichte in der ☐ GS, ☐ Sek I, ☐ Sek II (bitte ankreuzen)

Menge	Titel	Einzelpreis	Bestell-Nr.
__	Sammelband Spiele	24,80 (35,80)	32934
__	Ratgeber Rechtschreibung	6,90	92143
__			
__			
__			
__			
__			
__			
__			

Preise zzgl. Versandkosten. Stand 1997 (Preise in Klammern für Nicht-Abonnenten)

BESTELLKARTE

EIN HEFT KOSTENLOS IM PROBE-ABONNEMENT– ZUM KENNENLERNEN UND PRÜFEN

- ☐ **Praxis Deutsch**
  *2mtl., Abo-Preis DM 114,40***
- ☐ **Der Deutschunterricht**
  *2mtl., Abo-Preis DM 115,60***
- ☐ **Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch / Französisch**
  *12x jährlich, Abo-Preis DM 145,00***
  ☐ **Englisch** oder ☐ **Französisch**
  *je 6x jährl., Abo-Preis je DM 105,40***
- ☐ **Der Altsprachliche Unterricht**
  *2mtl., Abo-Preis DM 121,60***
- ☐ **Die Grundschulzeitschrift**
  *10x jährl., Abo-Preis DM 140,60***
- ☐ **Zusammen**
  10x jährl., Abo-Preis DM 85,00
- ☐ **Kunst und Unterricht**
  *10x jährl., Abo-Preis DM 143,60***
- ☐ **Musik und Unterricht**
  *2mtl., Abo-Preis DM 101,80***
- ☐ **Musik und Unterricht inklusive 2 CDs**
  *Abo-Preis DM 165,80***
- ☐ **Geschichte lernen**
  *2mtl., Abo-Preis DM 99,40***
- ☐ **Geschichte in Wissenschaft und Unterricht**
  *mtl., Abo-Preis DM 178,20**
- ☐ **Geographie heute**
  *10x jährl., Abo-Preis DM 144,60***
- ☐ **Unterricht Biologie**
  *10x jährl., Abo-Preis DM 143,60***
- ☐ **Astronomie und Raumfahrt**
  2mtl., Abo-Preis DM 45,00
- ☐ **Mathematik lehren**
  *2mtl., Abo-Preis DM 115,60***
- ☐ **Unterricht Physik / Chemie**
  *12x jährl., Abo-Preis DM 154,60***
  ☐ **Physik** oder ☐ **Chemie**
  *je 6x jährl., Abo-Preis je DM 103,00***
- ☐ **Der Mathematikunterricht**
  *2mtl., Abo-Preis DM 139,60***
- ☐ **Computer und Unterricht**
  *4x jährl., Abo-Preis DM 92,60***
- ☐ **Arbeiten und Lernen**
  Technik und Wirtschaft
  *8x jährl., Abo-Preis DM 130,60***
  ☐ **Technik** oder ☐ **Wirtschaft**
  *je 4x jährl., Abo-Preis je DM 90,60***
- ☐ **Junge Wissenschaft**
  4x jährl., Abo-Preis DM 48,00, Abo-Preis für Schüler und Lehrer DM 32,00
- ☐ **Neue Sammlung**
  *4x jährl., Abo-Preis DM 145,00***
- ☐ **Sportpädagogik**
  *2mtl., Abo-Preis DM 115,60***
- ☐ **Religion heute**
  *4x jährl., Abo-Preis DM 88,60***

* *Im Bezugspreis ist ein Friedrich Jahresheft enthalten.*

** *Im Bezugspreis ist ein Friedrich Jahresheft und eine Ausgabe SCHÜLER enthalten.*

Beziehen Sie mehr als ein Abonnement, werden Jahresheft und Schülerheft nur einmal berechnet und geliefert. Alle Preise sind Jahresbezugspreise 1997, zzgl. Versandkosten. Die Abonnement-Berechnung ist auf das Kalenderjahr bezogen. Ein hiervon abweichender Bezug kann einen geringfügig veränderten Rechnungsbetrag ergeben. Änderungen vorbehalten.

PROBE-ABO

BESTELLUNG EINES PROBEABONNEMENTS

Sie erhalten eine Ausgabe der gewünschten Zeitschrift(en) kostenlos zugesandt. Wenn Sie uns bis spätestens 10 Tage nach Erhalt des Heftes schriftlich informieren, daß Sie nicht regelmäßig weiterlesen möchten, stellen wir die Lieferung ein. Hören wir nichts von Ihnen, erhalten Sie Ihre bestellte(n) Zeitschrift(en) regelmäßig zum günstigen Jahres-Abonnementpreis. Eine Kündigung ist bis zu sechs Wochen vor Ende des Berechnungszeitraumes (=Kalenderjahr) möglich.

Kunden-Nr. | | | | | | | |

Name Vorname 024

Schulart / Schulstufe / Fächerkombination

Straße

PLZ / Ort

Datum Unterschrift

Die Bestellung kann binnen einer Woche gegenüber dem Friedrich Verlag widerrufen werden. Zur Fristwahrung genügt die Absendung innerhalb der Frist (Poststempel).

Datum 2.Unterschrift

Bitte freimachen

ANTWORT

Friedrich Verlag
Vertrieb
Postfach 10 01 50

30917 Seelze

BITTE SENDEN SIE UMSEITIGE BESTELLUNG AN:

Bitte freimachen

Kunden-Nr. | | | | | | | |

Name Vorname 024

Schulart / Schulstufe / Fächerkombination

Straße

PLZ / Ort

Datum Unterschrift

Die Bestellung kann binnen einer Woche gegenüber dem Friedrich Verlag widerrufen werden. Zur Fristwahrung genügt die Absendung innerhalb der Frist (Poststempel).

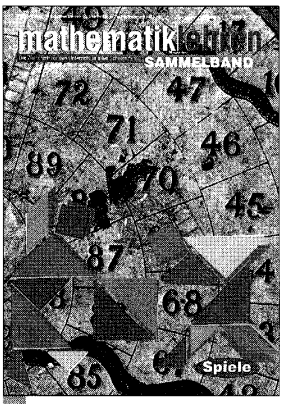
ANTWORT

Friedrich Verlag
Vertrieb
Postfach 10 01 50

30917 Seelze

MATHEMATIK LEHREN

SAMMELBAND SPIELE



Bestell-Nr. 32934, je DM 24,80 (DM 35,80 für Nicht-Abonnenten) zzgl. Versandkosten. Stand '97

Für Ihre Bestellung nutzen Sie bitte die Bestellkarte im Beihefter.

Spiele und Knobeleien

Spiele machen Spaß. Spiele sind spannend und entspannend zugleich. Spiele erlauben für eine gewisse Zeit aus der Realität in eine fiktive Welt abzutauchen.
Der Sonderdruck Spiele der Zeitschrift **mathematik lehren** enthält auf 112 Seiten Spiele, Spielideen und Anregungen für den Mathematikunterricht von Klasse 5 bis 10. Dabei stehen neben Knobeleien Spiele im Vordergrund, die im alltäglichen Unterricht einsetzbar sind. Dabei handelt es sich um eine Zusammenstellung der Spiele aus den vergangenen Ausgaben von **mathematik lehren**.

FRIEDRICH VERLAG
Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett

LESER-SERVICE

Liebe Leserinnen, liebe Leser!

Der Friedrich Verlag möchte Ihnen noch mehr Service bieten. Wir möchten Sie in Ihrer Unterrichtsvorbereitung unterstützen und würden gerne von Ihnen erfahren, wo Sie Schwerpunkte setzen, sich Unterstützung wünschen, was wir für Sie tun können.

Suchen Sie vielleicht Unterrichtsmaterialien zu einem bestimmten Thema? Brauchen Sie didaktische Sekundärliteratur? Möchten Sie gerne wissen, ob der Friedrich Verlag schon einmal etwas zu Ihrem Unterrichtsthema veröffentlicht hat und wann das war?

Wir beraten Sie gerne und schicken Ihnen das Gewünschte zu – natürlich auch dann, wenn Sie noch keine Zeitschrift bei uns abonniert haben.

Rufen Sie einfach den Leser-Service an, faxen Sie oder sprechen Sie eine Nachricht auf den Anrufbeantworter – wir werden eine Lösung finden und Ihnen gerne weiterhelfen.

Sie erreichen den Leser-Service unter

(05 11) 40004-88

per Telefon, Fax oder Anrufbeantworter.

LESER-SERVICE

Telefon • Fax • Band

(05 11) 40004-88

Friedrich Verlag
Postfach 10 01 50
30917 Seelze

Wir freuen uns schon darauf, Sie kennenzulernen!

Stefanie Krone
und das Leser-Service-Team