Neues zum Analysisunterricht in Grundkursen

Peter Baumann, Dr. Thomas Kirski, Helmut Wunderling
Berlin

9. April 2012

Zusammenfassung

Nach der Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur auf 12 Jahre steht für den Grenzwertbegriff im Grundkurs keine Zeit mehr zur Verfügung. Die aktuellen Lehrpläne der Bundesländer sehen stattdessen einen „inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriff" (oder Ähnliches) vor. Vielen Lehrkräften ist unklar, wie damit die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung unterrichtet werden sollen. Der vorliegende Beitrag enthält einen Vorschlag für einen Unterrichtsgang mit ganzrationalen Funktionen, durch den mit geringem Zeitaufwand eine fundierte Einführung aller Grundlagen der Differenzialrechnung (für Grundkurse) erreicht werden kann. Dabei kommt man völlig ohne Grenzwertbegriff aus.
Darauf aufbauend lassen sich auch alle weiteren Funktionsklassen behandeln.

Vorwort

Die aktuellen Lehrpläne in den Bundesländern verlangen ganz überwiegend den Grenzwert nur noch „intuitiv", wobei unklar bleibt, was das bedeuten soll. Letztlich ist den Autoren wohl klar, dass es das nicht gibt, und dass eine gründliche Behandlung im Grundkurs (unter den gegebenen Umständen) unmöglich ist.

Die vorliegende Schrift ist ein Vorschlag, wie Lehrerinnen oder Lehrer ihren Unterricht aufbauen können, um den behördlichen Vorgaben so zu entsprechen, dass ihre Schülerinnen und Schüler fundierte Vorstellungen entwickeln können, die für die Differenzialrechnung tragfähig sind. Dabei gilt es zu beachten, dass für Grundkurse kein Grenzwertbegriff mehr zur Verfügung steht. Daher wird ein Weg beschrieben, der anschließend zwar auch in Leistungskursen mit Grenzwerten ohne Bruch fortgesetzt werden kann, der aber vor allem Grundkursschülern hilft, sich intuitiv und dennoch korrekt in der Analysis zu bewegen.

Für Schüler bzw. Schülerinnen der 10. Klasse ist das Differenzieren neu, so dass es für sie keine Rolle spielt, welche didaktische Variante ihr Lehrer wählt. Der hier vorgeschlagene Weg kommt fast ohne höhere Mathematik aus und wird deshalb leicht verstanden. Ohne großen Zeitaufwand kann der Lernende übliche Aufgaben mit ganzrationalen Funktionen selbständig bearbeiten, wofür das ganze 10. Schuljahr zur Verfügung steht. Es wird keine Zeit etwa damit verschwendet, dennoch so etwas wie einen „Grenzwert" zu etablieren.

Dafür muss sich der grenzwertgeprägte Unterrichtende bereits beim Lesen des Artikels auf eine ganz andere, psychologische Weise anstrengen. Wie die Autoren aus eigener Erfahrung wissen, fällt der ausgebildete Mathematiker vollautomatisch in das dynamische Denken mittels Grenzwert, wenn nur irgend ein Thema an Analysis erinnert. Diese Art der inneren Einstellung verträgt sich nicht mit der hier vorgestellten algebraisch-statischen Methode.

Daher unsere dringende Bitte an die Lehrerin oder den Lehrer:

Machen Sie sich bereits für die Lektüre des vorliegenden Artikels frei von Ihrer lieb gewordenen Denkweise in Grenzwertkategorien und wünschen Sie sich die unbeschwerte Neugier eines Anfängers. Öffnen Sie sich bitte für die neuartigen Gedanken und widerstehen Sie dem natürlichen Hang, bei jeder Gelegenheit das Neue an dem Gewohnten zu messen.

Diese Anstrengung wird nicht mehr notwendig sein, wenn man mindestens einmal auf diese Weise bei den Schülern erfolgreich war.

Die Grundaufgabe der Differenzialrechnung ist das Bestimmen der momentanen Änderung von Funktionswerten $f(x)$ bzw. der Steigung des zugehörigen Funktionsgraphen. Mittelpunkt ist und bleibt die Steigungsformel (zur „h-Methode"):

$$m(x;h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Neu ist also nicht die notwendige Algebra, sondern nur der Umgang mit dem Problem, auf welche Weise man sich von dem „störenden h" befreit. Hier jedenfalls durchläuft h keine Nullfolge. Aber was geschieht stattdessen? Das wird vorgestellt werden. Leitgedanke ist es, von den Praktikern für die Mathematik zu lernen.

Die einzelnen Teile sind in „Stunden" gegliedert, damit sie als Möglichkeit für eine Unterrichtsreihe gesehen werden können.

Annäherung an das Differenzieren in Klasse 10

Stunde 1: Geraden

Diese Stunde dient dem Aufgreifen bekannten Wissens über Geraden im Koordinatensystem und hebt dabei vor allem auf den Begriff „Anstieg" bzw.„Steigung" ab.

Grundlage für die erste Stunde könnte das Arbeitsblatt auf Seite 3 sein, an dem die Verbindung zwischen Geometrie und Algebra für Geraden in der x-y-Ebene wiederholt werden kann. Damit nicht alles schon „bekannt" und also langweilig ist, enthält es außer dem Koordinatensystem nur zwei Geraden g_1 und g_2 und drei Punkte A, B, C. (Hellgrau hinzugefügt sind die Geraden, die eingezeichnet werden sollen.) Von Vorteil ist es, wenn die Lehrkraft das Arbeitsblatt mit Geogebra[1] interaktiv mit den Schülern bearbeiten kann.

Zunächst geht es also — stellvertretend für alle Ursprungsgeraden — um die Gerade g_1. Ihre Schräglage wird vom Winkel mit der Größe α gekennzeichnet, zusammen mit dem Ursprung U (Schnittpunkt von g_1 mit der x-Achse) ist die Gerade festgelegt.

Winkel werden mittels Kreisbögen gemessen. Das ist zum Rechnen nicht so einfach. Leichter ist es, rechtwinklige Dreiecke zu benutzen, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Welches der angebotenen Dreiecke mit Spitze U benutzt wird, ist egal, weil alle „Steigungsdreiecke" einander ähnlich sind. Der Geradenpunkt X — in Geogebra auf g_1 beweglich — liegt auf dem Blatt an der Stelle x im Abstand y von der x-Achse. Als er sich genau über U befand, war dieser Abstand 0. Bei der Bewegung auf der Geraden bis zur Stelle x ist er also um y gestiegen. Diese Eigenschaft der Geraden drückt man so aus:

$$\text{Die Gerade} \quad g_1 \quad \text{besitzt den Anstieg} \quad \frac{y}{x}\,.$$

Benutzt man das kleinere Dreieck, das an der Stelle 2 endet, so lässt sich im Gitternetz ablesen, dass dort der Geradenpunkt um eine Einheit nach oben von der Horizontalen entfernt ist. Der Anstieg ist also zahlenmäßig erfasst: $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

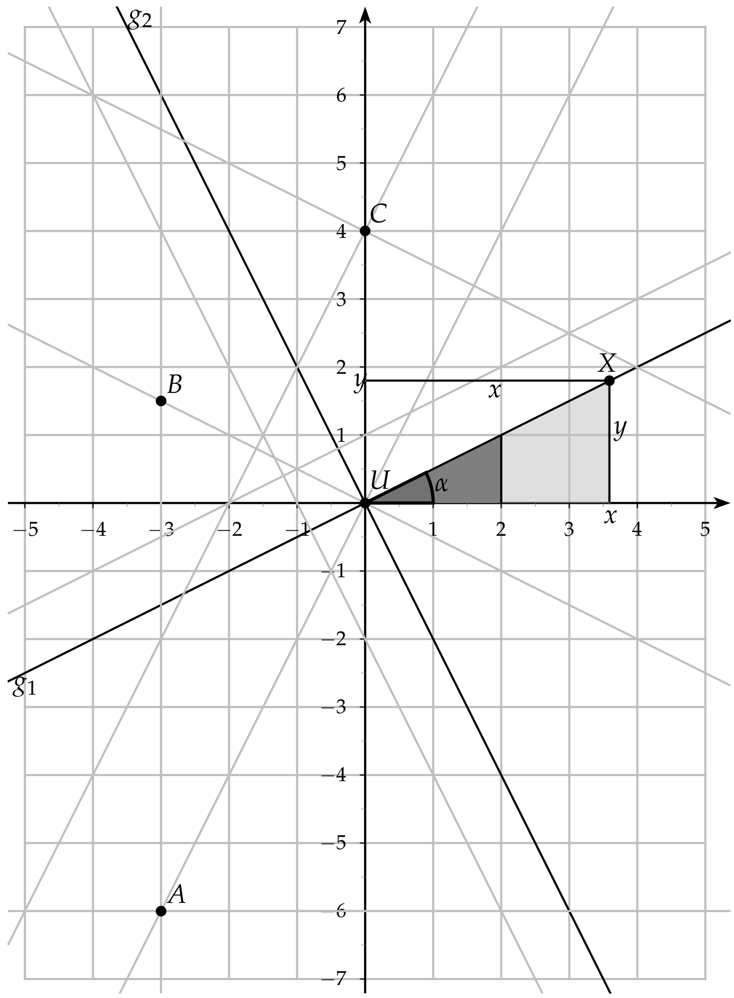
Weil jeder Stelle x genau ein Wert y zugeordnet wird, schreibt man die Gleichung in der Form $y = \frac{1}{2} \cdot x$; so lässt sich zu jedem x das passende y leicht berechnen.

Nun zur Geraden g_2. Sie ist dadurch entstanden, dass g_1 um den Punkt U um 90 Grad gedreht wurde. Die beiden Geraden stehen also senkrecht aufeinander.

Folgende Aufgaben sollten die Schüler nun, ggf. als Hausaufgabe, bearbeiten können:

1. g_1 geht durch den Punkt $(-4\,;\,-2)$. Zeichnen Sie Steigungsdreiecke mit dieser Spitze und überzeugen Sie sich, dass auch mit diesen der bekannte Anstieg berechnet werden kann.

[1] Diese freie Software steht unter www.geogebra.org für alle Rechnerplattformen zum Download zur Verfügung.



2. g_2 geht durch den Punkt $(3\,;\,-6)$. Zeichnen Sie Steigungsdreiecke mit dieser Spitze und berechnen Sie mehrmals den Anstieg der zweiten Gerade.
   (Hinweis: g_2 steigt nicht an, sondern fällt ab. Dennoch spricht man von „Anstieg“, berechnet ihn nach derselben Methode, erhält aber einen negativen Wert.)

3. Drehen Sie das (gedruckte) kleine Steigungsdreieck von g_1 in die Position von g_2. Berechnen Sie mit den beiden erhaltenen Dreiecken (Es gibt zwei mögliche Drehungen!) den Anstieg von g_2.

4. Zeichnen Sie die parallele Gerade zu g_1, welche durch den Punkt $(0\,;\,1)$ verläuft. Bestimmen Sie deren Anstieg und Gleichung, die von der Form $\quad y = m \cdot x + n \quad$ ist.

5. Zeichnen Sie die parallele Gerade zu g_2, welche durch den Punkt $(0\,;\,-2)$ verläuft. Bestimmen Sie deren Anstieg und Gleichung.

6. Zeichnen Sie die Geraden UA und UB. Ermitteln Sie ihre Anstiege und die zugehörigen Gleichungen $\quad y = \cdots$. Was fällt Ihnen auf?

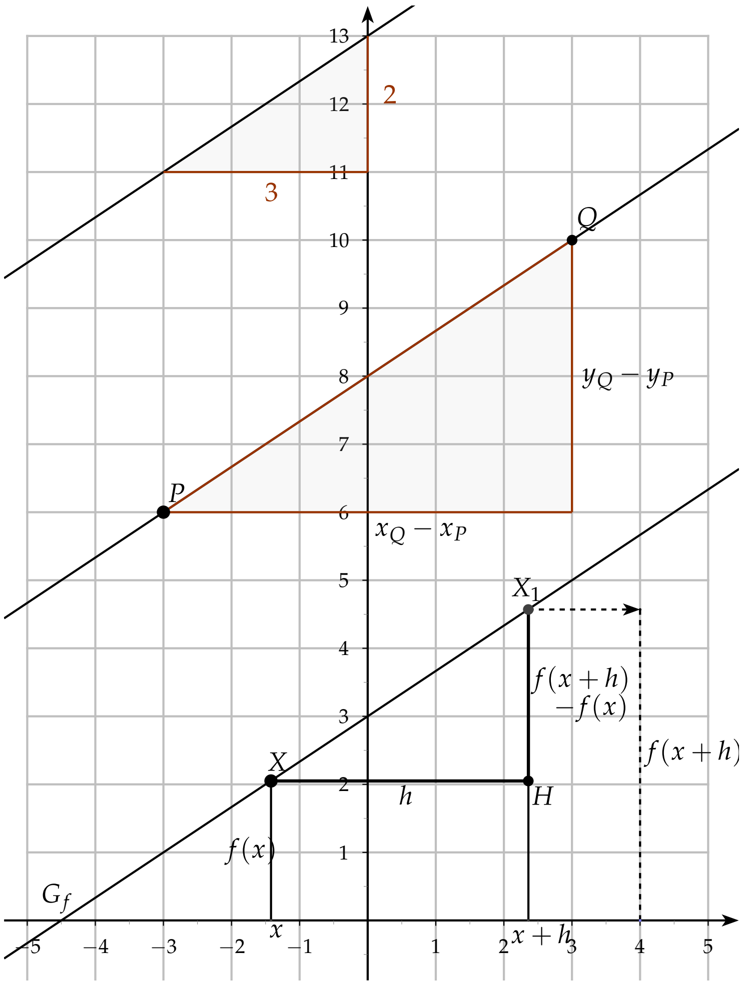
7. Zeichnen Sie zu UA und zu UB die Parallelen durch C. Ermitteln Sie ihre Anstiege und Gleichungen.

8. Zeichnen Sie durch A die Senkrechten zu den beiden Koordinatenachsen. Ermitteln Sie ihre Anstiege und Gleichungen.

9. Zeichnen Sie zu den folgenden Gleichungen die entsprechenden Geraden in ein neues Koordinatensystem. *Bevor* Sie zeichnen, beschreiben Sie (für sich), wie die jeweilige Gerade liegen muss, auch im Vergleich zu den anderen.
$y = 4x$, $y = -4x$, $y = \frac{1}{4}x$, $y = -\frac{x}{4}$, $y = 4x + 2$, $y = 4x - 3$, $y = -4x + 3$, $y = \frac{1}{4}x + 3$, $y = 0 \cdot x + 1$, $y = -2$, $y = 0$, $y = 2 - 4x$, $y = 3 + \frac{1}{4}x$, $x = -3$.

Stunde 2: Funktionen 1. Grades

Diese Stunde dient dem Übergang zum Funktionsbegriff. Nach dem Sammeln der Ergebnisse der letzten Aufgaben kann z. B. mit folgendem Arbeitsbogen das Augenmerk auf die verschiedenen Umgangsweisen zur Berechnung von Anstiegen gelenkt werden.



Abgebildet sind drei parallele Geraden. Ihr gemeinsamer Anstieg m kann einfach an der obersten abgelesen werden. Das Längenverhältnis $v : h$ der **v**ertikalen zur **h**orizontalen Kathete beträgt $2 : 3$, es ist also $m = \frac{2}{3}$. Weil die oberste Gerade die y-Achse bei 13 schneidet, lautet ihre Gleichung $y = \frac{2}{3}x + 13$.
Entsprechend ist die Gleichung der mittleren Gerade $y = \frac{2}{3}x + 8$.
Weil zwei Punkte, z. B. P und Q, die Gerade bestimmen, benötigt man stets zwei Punkte, um ihre Steigung zu berechnen. Sind x_P, y_P und x_Q, y_Q die Koordinaten der beiden Punkte, so berechnet sich der

Anstieg m zu

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}, \qquad m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

An der unteren Geraden soll eine andere Sichtweise geklärt werden.

Sie besitzt $y = \frac{2}{3}x + 3$ als Geradengleichung. Die Gleichung erlaubt es, zu jedem x das zugehörige y zu bestimmen. Nimmt man z. B. für x die Zahl 3, so ergibt sich für y die Zahl 5, nämlich $y = \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = 5$. Und tatsächlich ist $(3\,;\,5)$ ein Punkt der Geraden.

Die Gleichung ist nämlich die Vorschrift, nach der jeder Zahl x eindeutig die entsprechende Zahl y zugeordnet wird. Zuordnungen dieser Art nennt man „Funktionen" und benutzt gern den Buchstaben „f" als Abkürzung. In Zeichen:

$$f:\ x \longmapsto \frac{2}{3} \cdot x + 3, \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Weil für x jede reelle Zahl genommen werden kann, wird durch diese Funktion die ganze Menge $\mathbb{R}$ auf sich selbst abgebildet; das bedeutet der Zusatz $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Der Blick wandert also von der geometrischen Geraden, die mit Punkten und anderen Geraden geometrische Figuren bilden lässt, zu der Menge aller Punkte, deren Koordinatenpaare $(x\,;\,y)$ jeweils durch die Funktion f verbunden sind. Sie wird lediglich zur Veranschaulichung der Funktion f herangezogen und wird der „Graph von f" bezeichnet. Im Bild steht deshalb die Bezeichnung G_f an der Geraden.

Bleibt nur noch das aus der Geometrie stammende und nun störende y zu ersetzen. Betrachtet man nämlich mehr als eine Funktion, so kann man natürlich für jede ein x vorgeben, es muss aber dafür gesorgt werden, dass die y-Ergebnisse auseinanderzuhalten sind. Das wird durch die Schreibweise $f(x)$ anstelle von y gewährleistet, $y = f(x)$.

Man spricht auch nicht mehr von der y-Koordinate eines Punktes, sondern vom Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x. Die Geradengleichung $y = \frac{2}{3}x + 3$ wird zur Funktionsgleichung zu f, $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$, denn sie beinhaltet die Rechenvorschrift für f.

Die Fragestellung nach dem Anstieg eines Funktionsgraphen an einer Stelle x ist jedoch der Angelpunkt der gesamten Differenzialrechung. Daher lohnt es sich, eine Methode zum Aufbau eines Steigungsdreiecks zu betrachten, die mit geringstem Aufwand Ergebnisse liefern kann — obwohl das natürlich im vorliegenden Fall gar nicht nötig wäre.

Start ist die Vorgabe einer Stelle x auf der x-Achse. Sie bestimmt den Punkt X auf dem Graphen, $X : (x\,;\,f(x))$.

Man benötigt nun einen zweiten, von X verschiedenen Punkt X_1 auf dem Graphen. Dazu geht man am besten von X aus ein horizontales Stück h weiter und erreicht zunächst den 2. Punkt des nötigen Dreiecks, H. Er befindet sich an der Stelle $x + h$, d. h. $H : (x + h\,;\,f(x))$. Zu dieser Stelle gehört drittens der Punkt X_1 auf dem Graphen, $X_1 : (x + h\,;\,f(x + h))$. Das Dreieck ist gebildet.

Die Länge der vertikalen Kathete ist $f(x + h) - f(x)$, die der horizontalen einfach h — eine Differenz ist bei der Berechnung des Anstiegs m gespart und das vereinfacht vor allem Buchstabenrechnungen. Wird noch vermerkt, dass m an der Stelle x mithilfe von h berechnet wurde, so schreibt man:

$$m(x;h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ .$$

Damit kann ganz allgemein gerechnet werden.

Gegeben sei eine beliebige ganzrationale Funktion 1. Grades, d. h. eine Funktion f, deren Zuordnungsvorschrift genau so gebildet ist wie die des letzten Beispiels:

$$f:\ x \longmapsto a \cdot x + b, \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Gesucht wird der Anstieg ihres Graphen an einer nicht näher bestimmten Stelle x.

Natürlich ist das Ergebnis bereits bekannt, aber man tut so, als ob man neu anfangen müsste. Warum? Weil man mit dem neuen Vorgehen das bereits Bekannte bestätigen sollte.

Um die Formel für $m(x;h)$ anwenden zu können, muss man in Gedanken einen während der Rechnung festen Wert für h wählen, für den nur eine einzige Bedingung gilt: $h \neq 0$, denn durch diese Zahl muss dividiert werden. Ferner werden die beiden Funktionswerte an den Stellen x sowie $x+h$, d. h. $f(x)$ und $f(x+h)$ benötigt. Wie sie gebaut sind, liest man an der Zuordnungsvorschrift ab. $f(x) = a \cdot x + b$, $f(x+h) = a \cdot (x+h) + b$.

Nun ist alles beisammen[2], und man kann die Formel anwenden:

$$m(x;h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(a \cdot (x+h) + b) - (a \cdot x + b)}{h} = \frac{a \cdot h}{h} = a.$$

Diese Rechnung ist leichter überschaubar als mit Zahlenwerten für a, b, x und h. Man kann auch Schüler leicht davon überzeugen, wenn sie mit $a = 32,41$ und $b = -0,85$ den Anstieg $m(7,3; 0,021)$ berechnen sollen.

Viel wichtiger noch ist die Interpretation des Resultats $m(x;h) = a$.

Welche Funktion 1. Grades auch immer vorliegt. Es ist klar, dass ihr Graph eine einzige Steigung besitzt, die an allen Stellen x berechnet werden kann, mit welcher Schrittweite $h \neq 0$ zur Hilfsstelle $x+h$ auch immer. Und diese Steigung gibt der Koeffizient a von x direkt an. Die Steigung ist auch unabhängig vom Summanden b — wegen $b = f(0)$ gibt b die Zahl auf der vertikalen Achse an, bei der sie von G_f geschnitten wird. Daher haben Funktionen, deren Gleichungen sich nur in diesem Summanden unterscheiden, parallele Graphen. Es kann sich bei ihnen also nur um Geraden handeln.

Alles, was schon vorher bekannt war, lässt sich also allein aus der Gleichung von f ablesen.

Jede (ganzrationale) Funktion 1. Grades mit $f(x) = a \cdot x + b$ *besitzt eine Gerade als Graph.*

Aber Achtung! Nicht jede Gerade ist Graph einer Funktion 1. Grades! Woran das liegt, sollte nicht unerwähnt bleiben. In den Aufgaben zu Stunde 1 sind solche Geraden als Beispiele enthalten.

Stunde 3: Die Parabel und das Steigungsproblem

Die einfachste Funktion f, $x \longmapsto f(x)$, welche keinen geraden sondern einen gekrümmten Graph hat, muss eine Gleichung besitzen, die x „etwas mehr“ als nur in der 1. Potenz enthält. Ganzrationale Funktionen 2. Grades besitzen daher Gleichungen der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\ .$$

Für $a = 1$, $b = c = 0$ erhält man die einfachste Gleichung: $f(x) = x^2$. Sie soll stellvertretend für die übrigen Funktionen dieser Art hinsichtlich ihres Steigens bzw. Fallens untersucht werden.

Naheliegend ist die Idee, den Anstieg einer Geraden zu benutzen, um auch bei Kurven sagen zu können, wie „schräg“ sie an einer vorgegebenen Stelle verlaufen. Aber eindeutig Zahlenwerte zu finden, die voll überzeugen, ist schwer, weil es nicht so leicht gelingt, passende Geraden zu finden. Zum Probieren stellt man z.B. folgende Aufgabe:

1. Füllen Sie die Funktionstabelle aus, zeichnen Sie die 7 Punkte $(x\,;\,x^2)$ in ein Koordinatensystem und verbinden Sie diese mittels einer Kurve.

x	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
x^2	9						

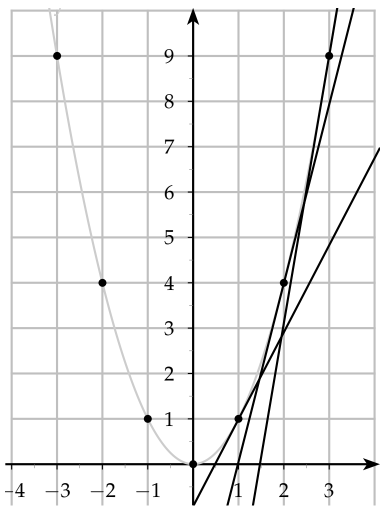
2. Ihre Kurve kann keinen einzelnen „Anstieg“ besitzen, sondern fällt bzw. steigt an jedem Punkt unterschiedlich. Zeichnen Sie daher durch jeden der 7 Punkte eine Gerade, von der Sie überzeugt sind, dass deren Anstieg das Steigungsverhalten der Kurve gut beschreibt.

3. Zeichnen Sie zu jeder der 7 Geraden ein Steigungsdreieck, messen Sie deren Kathetenlängen und berechnen Sie die 7 Anstiege $m(x)$. Tragen Sie sie in die folgende Tabelle ein. (Drei (*freihändig!*) mit Geogebra bestimmte Geraden enthält die Abbildung auf Seite 7.)

[2] Man kürzt den Aufwand gerne ab, indem man statt der Funktion f nur ihre Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x + b$ angibt.

x	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$m(x)$				0			

4. Was können Sie daraus ablesen?
   Wie gut stimmen Ihre Messwerte mit denen Ihrer Mitschüler/innen überein?



Wann passt eine Gerade? Sie muss auf jeden Fall mit der Kurve den Punkt gemeinsam haben, an dem der Anstieg bestimmt werden soll. Andererseits darf sie keinen weiteren Kurvenpunkt mehr gemeinsam haben[3], denn jede Kurve unterscheidet sich grundsätzlich von einer Geraden. Verliefe die Gerade durch zwei Kurvenpunkte, dann würde sie das Kurvenstück zwischen den beiden Punkten so abschneiden wie ein Messer es bei einem Apfel tut. Verbindungsgeraden zweier Kurvenpunkte heißen deswegen auch Sekanten (lat.: secare – schneiden). Die Steigung jeder Sekante kann daher prinzipiell das Verhalten einer Kurve nicht wiedergeben. Gesucht sind deswegen Tangenten (lat.: tangere – berühren), wie sie vom Kreis bekannt sind. Hier weiß man auch, wie die Tangente zu einem Punkt bei jedem beliebigen Kreis konstruiert werden kann und daher lässt sich ihr Anstieg berechnen[4].

Glücklicherweise ist der Graph zu $f(x) = x^2$ eine seit alters her bekannte Kurve, die den ebenso alten Namen *Parabel* trägt. Hier weiß man, wie man Tangenten konstruiert. Daraus folgt dann auch eine leichte Berechnung des Tangentenanstiegs, das Problem ist hier gelöst.

Das allgemeine Problem für andere Kurven bleibt aber weiterhin offen: Es ist zunächst zu klären, was dort Tangenten sein sollen. Kreis und Parabel sind nur Hilfen zur Entwicklung von Gedanken. Benutzt man dieses Wissen, so ergibt sich das Problem der Tangentenfindung in aller Schärfe: Genau **einen** Kurvenpunkt soll die gesuchte Tangente besitzen, aber **zwei** Geradenpunkte benötigt man zur Berechnung des Anstiegs einer Geraden und damit des „Anstiegs der Kurve in diesem Punkt“.

Als einziger Ausweg bleibt, einen zweiten Punkt zu Hilfe zu nehmen, durch den die Gerade gehen soll. Dabei gilt es zu entscheiden: Soll dieser Hilfspunkt auf der Kurve liegen oder nicht?

Folgende drei Methoden führen zum Erfolg.

1. (beschränkt auf Parabeln): Geometrische Konstruktion aus der uralten Erfahrung mit Sonnenlicht, die auch heute überall als Empfangsschüsseln für Satellitenfernsehen sichtbar ist.

[3] Zumindest nicht in unmittelbarer Nähe.

[4] Liegt der Mittelpunkt eines Kreises im Ursprung und ist $P : (x_K\,;\, y_K)$ ein Kreispunkt, so ist $\frac{y_K}{x_K}$ der Anstieg der zugehörigen Radiusgeraden. Weil die Tangente senkrecht darauf steht, muss $-\frac{x_K}{y_K}$ ihr Anstieg sein, der zugleich als Anstieg des Kreises am Punkt P bezeichnet werden soll. Weil aber Kreise keine Funktionsgraphen sind und selbst Halbkreise nicht durch ganzrationale Funktionen beschrieben werden können, wird dies hier nicht weiter verfolgt.

2. (beschränkt auf Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen): Hilfspunkt nicht auf der Kurve, algebraisches Verändern seiner Lage, bis die Gerade die Kurve nicht in einem zweiten Punkt schneidet.

3. (beschränkt auf ganzrationale Funktionen): Hilfspunkt auf der Kurve, Untersuchung der eigentlich unbrauchbaren Sekantensteigungen, bewusster Umgang mit Fehlern.

Folgende Recherche-Aufgabe könnte zum Einstieg gestellt werden:

Versuchen Sie, eine der Methoden über das Internet kennenzulernen, und wenden Sie diese auf die Parabel zu $f(x) = x^2$ an.

Warum will man eigentlich Anstiege bei Kurven bestimmen? Menschen möchten wissen, wie sich etwas entwickelt (z. B. das Wetter). Sie bilden daher mathematische Modelle ihrer Wirklichkeit, und Funktionen sind das Ergebnis ihrer Bemühungen. Das Änderungsverhalten wird durch die Anstiege ihrer Graphen beschreibbar.

Stunde 4: Bestimmung der Tangentensteigung einer Parabel

Die erste Methode stammt aus der Blütezeit der antiken Mathematik. Sie wird mit 4 Bildern erzählt (siehe Seite 9).

Bild 1: Parallel zur Symmetrieachse treten Lichtstrahlen in die nach oben geöffnete Parabel. Denkt man sich die Kurve verspiegelt, so reflektiert sie jeden dieser Lichtstrahlen zu einem einzigen Punkt hin. NEWTON kannte natürlich Bild 1 als reine geometrische Tatsache. Die Idee mit der Verspiegelung kam ihm zusätzlich, weil er mit seinem Linsenteleskop nicht zufrieden war. Und so baute er das erste Spiegeltelskop, das — je nach Größe — viel Licht sammeln kann. Mit einer Lupe musste er nur den hell leuchtenden Punkt betrachten und sah damit Sterne, die viel zu lichtschwach leuchten, um mit bloßem Auge gesehen zu werden.

Derselbe Verstärkungseffekt wird beim Satellitenfernsehen genutzt. Erst wenn man viele Strahlen sammelt und auf die Antenne leitet, kommt ein Fernsehbild zustande.

Auch die Sonne schickt parallele Strahlen zu uns. In einem parabolischen Spiegel wird dann der Punkt, in dem sich alle gesammelten Sonnenstrahlen bündeln, so heiß, dass man damit z. B. Holz anzünden kann. Deswegen heißt dieser Punkt innerhalb der Parabel ihr „Brennpunkt" oder lateinisch *Focus*, ganz wie bei Linsen auch.

Bild 2: Einer der Lichtstrahlen ist herausgegriffen, um seine Reflexion genauer zu untersuchen. Bei Reflexion an ebenen Spiegeln gilt das Reflexionsgesetz. Daher ist eine Spiegelstrecke genau so schräg eingezeichnet, dass der Strahl nach seiner Reflexion durch den Fokus verläuft. Sie musste daher so gedreht werden, dass die Winkelmaße α und β übereinstimmen (Reflexionsgesetz). Verfolgt man die Richtung des Lichtstrahls ohne Spiegel bis zum Punkt L, so entsteht ein dritter Winkel, dessen Größe γ ebenfalls mit α übereinstimmen muss, weil beide Winkel Scheitelwinkel sind. Zur Überprüfung von $\alpha = \gamma$ eignet sich jedes gleichschenklige Dreieck. Deswegen ist L genau so weit entfernt von der Reflexionsstelle gezeichnet wie der Fokus von ihr entfernt ist.

Die Gerade durch L, senkrecht zur Symmetrieachse, heißt seit alters her *Leitgerade*.

Dies ergibt eine Möglichkeit, Parabelpunkte zu konstruieren, z.B. mit folgender Aufgabe:

Zeichnen Sie eine beliebige Gerade l und einen Punkt F etwas abseits dieser Geraden. Zeichnen Sie um F den Kreis mit dem Radius z. B. 3 cm und zusätzlich im Abstand von 3 cm die Parallele zu l, die den Kreis schneidet. Sie erhalten dann zwei Punkte, die nach Bild 2 Reflexionspunkte sein müssen. Wählen Sie statt der 3 cm andere Abstände und zeichnen Sie die Punkte, bis Sie ein Bild der entstehenden Kurve freihändig zeichnen können.

Diese Kurve besteht also aus allen Punkten, für die sich der Abstand zum Fokus und der zur Leitgeraden *gleichen*. Genau daher kommt ihr Name *PARABEL*, denn es ist das griechische Wort für *GLEICHNIS*.

Es bleibt zu klären, ob diese Parabel auch wirklich der Graph der Funktion mit $f(x) = x^2$ ist, dann lässt sich auch der Anstieg in jedem ihrer Punkte berechnen — ein besseres Argument für eine Tangente gibt es gar nicht als dass sie dasselbe Reflexionsverhalten zeigt wie die Kurve selbst.

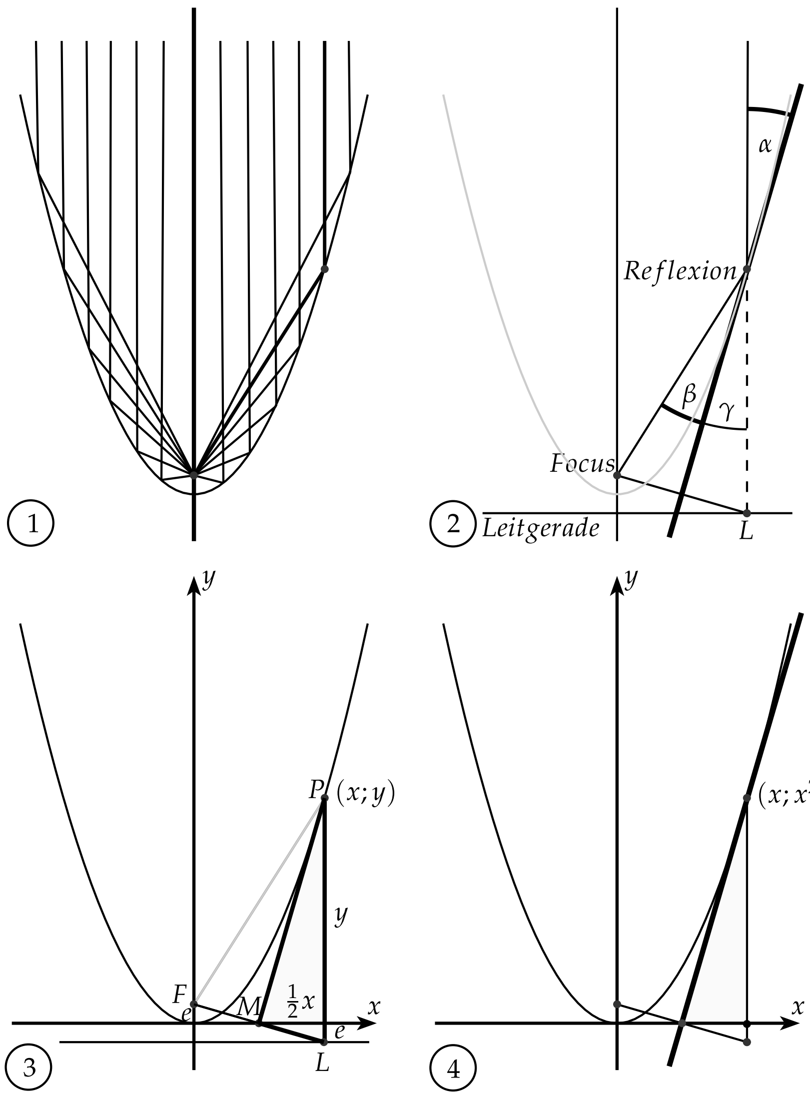


Bild 3: Hier wird die Zeichnung in ein Kordinatensystem gestellt, um sie mit einem Funktionsgraphen vergleichen zu können.

Zu jedem Parabelpunkt P gibt es das gleichschenklige Dreieck PFL. Es wird durch seine (spiegelnde) Symmetrieachse PM in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Punkt M ist der Mittelpunkt der Basis $\overline{FL}$. Er halbiert auch das Intervall $[0; x]$ auf der x-Achse, weil L in der Entfernung e genau so weit unter ihr liegt wie F oberhalb. Das bei M rechtwinklige Dreieck PML besitzt zwei Hypotenusenabschnitte, deren Längen mit e und y bezeichnet sind. Der Höhensatz liefert dann $y \cdot e = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich für die Gleichung der Parabel $y = \frac{1}{4e}x^2$.

Wählt man — wie in den Bildern geschehen — $e = 0{,}25$, so erhält man für die gezeichnete Parabel die Gleichung $y = x^2$. Es stimmt also $y = f(x)$; die Parabel ist Graph der Funktion f, dieser trägt seinen Namen zurecht.

Bild 4: Da nun bekannt ist, dass die Parabelpunkte die Koordinatenpaare $(x; x^2)$ besitzen, kann man direkt aus dem Steigungsdreieck für den Spiegel, d. h. die Tangente, ablesen:

$$\text{Anstieg der Parabeltangente:} \quad f(x) = x^2 \implies m(x) = \frac{x^2}{\frac{x}{2}} = 2x$$

Aufgabe: Überprüfen Sie hiermit Ihre Ergebnisse der Aufgabe 3 aus der 3. Stunde.

Die zweite Methode ist rein algebraisch und löst die konkrete Frage nach dem Anstieg der Parabel zu $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 1$. Dazu stelle man sich Bilder im Kopf vor oder fertige sich Skizzen an.

Grundidee ist: Eine Gerade durch $(1\,;\,1)$ schneidet im allgemeinen die Parabel in noch einem zweiten Punkt, sie kann jedenfalls nicht an der Parabel vorbeigehen (Passante). Sind $(x\,;\,y)$ die Koordinaten der Geradenpunkte, so ist für $x \neq 1$ ihr Anstieg $\frac{y-1}{x-1} = m$. Lässt man m offen, so kann man jeden geradlinigen Graphen durch $(1\,;\,1)$ beschreiben mittels $y(x) = m \cdot x - m + 1$.

Für Schnittpunkte mit der Parabel muss gelten: $f(x) = y(x)$. Daher wird die quadratische Gleichung $x^2 = m \cdot x - m + 1$ oder $x^2 - mx = 1 - m$ nach x aufgelöst. Es ergibt sich

$$x_{1/2} = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4m + 4}\,.$$

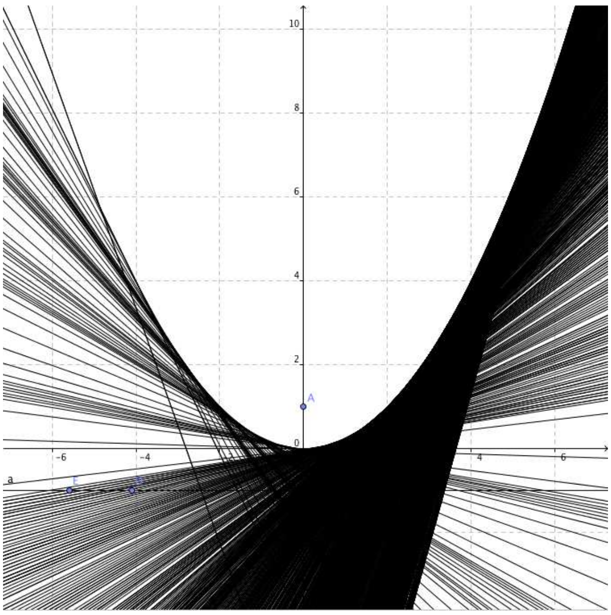
Im allgemeinen gibt es also zwei Lösungen, d. h. zwei Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel. Wenn aber der Radikand null ist, dann fallen beide Lösungen zu einer zusammen. Das ist für $m = 2$ der Fall und zwar bei $x = \frac{m}{2} = 1$.

Das Ergebnis mittels der ersten Methode — $m(x) = 2x$ — liefert dasselbe: $m(1) = 2$.

Das übereinstimmenden Ergebnisse der beiden Methoden helfen sehr, die dritte Methode zu beurteilen.

Anregung

Wer ganz modern an die alten Vorstellungen der ersten Methode kommen möchte, könnte mit Geogebra hervorragend experimentieren. Die folgende Abbildung zeigt ein mögliches Ergebnis.



1. Wählen Sie zunächst zwei beliebige Punkte A und B, die auf dem Blatt beliebig verschiebbar sind. Zu ihnen definiere man die Mittelsenkrechte a und aktiviere bei deren Eigenschaften den Modus ,,`Spur anzeigen`‘‘. Nun bewegen Sie gemächlich einen der beiden Punkte. Versuchen Sie den Punkt freihändig auf bestimmten Wegen zu halten (z.B. Dreieck, Kreis, Gerade).

2. Definieren Sie zwei Schieberegler für die Koordinaten X_M und Y_M eines Kreismittelpunktes M, den Sie mittels der Regler auch weit außerhalb des Bildschirms plazieren können. Ein weiterer freier Punkt C wird zur Definition des Kreises um M und durch C benötigt. Löschen Sie B und wählen Sie B erneut auf dem Kreisumfang. Mit einer neuen Mittelsenkrechten zu A und B können Sie mit B auf dem Kreis experimentieren und erstaunliche Bilder der Mathematik herstellen. (Der Kreisbogen wurde — nun ganz verständlich — *Leitlinie* genannt.)

3. Ersetzen Sie den Kreis durch eine Gerade mittes zweier beweglicher Geradenpunkte. Wählen Sie darauf einen neuen Punkt B usw. Mit dieser Geraden als Leitlinie gelangen Sie zu Parabeln jedweder Lage bzw. Öffnung. Wenn Sie die Frage lösen, welche Punkte es sind, die die (parabelförmige) Grenze der Ebene bestimmen, von der ab keine Tangente[5] hinein gezeichnet werden kann, kommen Sie zu den vier Bildern aus der Antike vom Anfang dieser Stunde.

Stunde 5: Anstiegsbestimmung bei ganzrationalen Funktionen

Nun zur dritten, gänzlich neuen Methode, die bei allen ganzrationalen Funktionen anwendbar ist. Sie lässt sich außerdem leicht auf alle reellen Funktionen der Differenzialrechnung erweitern.

Die Grundidee ist altbekannt. Man wählt einen Hilfspunkt auf dem Funktionsgraphen und berechnet nach der bekannten Formel

$$m(x;h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zwar eine Sekantensteigung, die bestimmt keine Tangentensteigung ist, deren Fehlerhaftigkeit aber hoffentlich dennoch brauchbare Resultate ermöglicht. Neu ist, wie man dazu gelangen kann, und das ist überraschend einfach.

Beispiel 1:

Anhand der einfachen Musterfunktion mit $f(x) = x^2$, deren (Tangenten-)Steigung man kennt, kann man die Güte des neuen Vorgehens messen. Berechne man also $m(2,34;0,21)$ für $f(x) = x^2$.

Die Steigungsformel liefert

$$m(2,34;0,21) = \frac{2,55^2 - 2,34^2}{0,21} = \frac{1,0269}{0,21} = 4,89.$$

Von diesem Ergebnis ist nur bekannt, dass es die gesuchte Steigung $m(2,34)$ für die *Parabeltangente* NICHT ist! Wüsste man nicht aus der Antike, dass $4,68$ der richtige Zahlenwert ist — und das ist die Situation bei allen Funktionen, deren Graph keine Parabel ist — so käme man nicht weiter, weil offen bleibt, wie groß der zu berücksichtigende Fehler ist. Ein dornenvoller Weg sytematischer Untersuchungen kann zum Ziel führen, dazu folgende

Aufgabe[6]:

Berechnen Sie für $x = 2,34$ die Sekantensteigungen zu den h-Werten der Tabelle auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie Ihre Ergebnisse dort ein. Lässt sich daraus etwas ablesen?

h	-3,00	-2,00	-1,00	-0,50	-0,01	+0,01	+0,50	+1,00	+2,00	+3,00
$m(2,34;h)$										

Für die Praxis ist dieses Verfahren durchaus praktikabel. Braucht jemand den Anstieg der Kurve nur auf 3 Stellen hinter dem Komma genau, so genügt es, $h = 0,00001$ zu wählen, weil die Stellen ab der vierten Dezimalen als überflüssig fortgelassen werden. Der Fehler, den die Sekante mit sich bringt, fällt gar nicht auf.

Eine viel kürzere und zugleich leichtere Überlegung beseitigt den Fehler grundsätzlich. Dazu soll offen bleiben, welcher Wert für h gewählt wird, positiv oder negativ, aber natürlich $h \neq 0$.

$$m(2,34;h) = \frac{(2,34+h)^2 - 2,34^2}{h} = \frac{(2,34^2 + 2h \cdot 2,34 + h^2) - 2,34^2}{h} = 4,68 + h.$$

Der Fehler, der gegenüber der eigentlich gesuchten Tangentensteigung wegen h entsteht, gibt sich nun zu erkennen. Hier liegt eine sehr komfortable Situation für den Umgang mit Fehlern vor:

a) Man weiß: das Ergebnis ist fehlerhaft. Der Fehler aber muss zunächst in Kauf genommen werden.

b) Man weiß: der Fehler stammt von der Benutzung einer Sekante statt der Tangente.

[5] Weil all die Mittellote die Kontur einer Parabel so einwandfrei darstellen, ist es richtig, sie Tangenten zu nennen.

[6] Man sollte die Aufgabe bei Zeitnot übergehen, sie wird nur zur Vorbereitung von Grenzwertverfahren tragend, die für Grundkurse ohne Bedeutung sind.

c) Der Fehler gibt sich also durch das Auftreten des Summanden h zu erkennen.
d) Der Fehler ist der Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Die Konsequenz lautet:

$$\text{Fehler} = m_{\text{Sekante}} - m_{\text{Tangente}}\,, \qquad \text{also} \qquad m_{\text{Tangente}} = m_{\text{Sekante}} - \text{Fehler}$$

oder als „Rezept“: **Nimm der fehlerhaften Sekantensteigung ihren Fehler weg!**

Die fehlerbereinigte Steigung $m(2,34)$ ist die aus der Antike bekannte Zahl $2 \cdot 2,34$, also $4,68$. Die Gerade, die durch den Parabelpunkt $(2,34; 2,34^2)$ verläuft und diese Steigung besitzt, wird auch heute Tangente genannt.

Das antike Ergebnis war allgemeiner: $y = \frac{1}{4e}x^2$ oder abgekürzt $y = ax^2$. Rechnet man damit ganz allgemein, so findet man:

$$m(x;h) = \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = a\frac{(x^2 + 2hx + h^2) - x^2}{h} = 2ax + ah \implies m(x) = 2ax,$$

denn mit h ist auch ah ein Fehler.

Beispiel 2:

Gegeben sei die Funktion dritten Grades mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Gesucht ist die Tangentensteigung $m(x)$ für jede Stelle x.

Zunächst werden die Sekantensteigungen $m(x;h)$ für $h \neq 0$ berechnet.

$$\begin{aligned} m(x;h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{((x+h)^3 - 3(x+h)^2 - (x+h) + 3) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - 3h^2 - h}{h} \\ &= (3x^2 - 6x - 1) + (3xh + h^2 - 3h) \end{aligned}$$

Hier ist bereits nach Summanden mit und ohne h sortiert worden. Daher zeigt sich im Ergebnis schon der „Sekantenfehler“ als $(3xh + h^2 - 3h)$. Bereinigt erhält man also

$$m(x) = 3x^2 - 6x - 1\ .$$

Da man bei dieser Funktion gar nichts über Tangenten oder deren Anstiege weiß, werden die Werte $m(x)$, die diese Gleichung liefert, als Anstiege des zugehörigen Graphen an den Stellen x definiert und die zugehörigen Geraden durch $(x\,;\,f(x))$ mit dem Anstieg $m(x)$ werden Tangenten genannt[7].

Aufgabe:

Die Gleichung $m(x) = 3x^2 - 6x - 1$ für die Steigung ist wieder eine Funktionsgleichung. Weil der Buchstabe „f“ bereits für die Funktion vergeben ist, von der sie stammt, man aber doch zum Ausdruck bringen möchte, dass diese neue Funktion aus f abgeleitet wurde, bleibt man bei diesem Buchstaben und schreibt als Unterscheidungsmerkmal lediglich einen kleinen Strich heran, „f'“. (Man nennt f' die Ableitung(-sfunktion) von f.)

Gehen Sie von $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ aus und bestimmen Sie die Gleichung für deren Tangentenanstiege, $f''(x) = \cdots$. Zeichnen Sie die Graphen zu f, f' und f'' in ein Koordinatensystem und versuchen Sie, Zusammenhänge zwischen den drei Graphen aufzudecken.

[7] Ein Vorgehen, das annimmt, man wüsste schon, was hier Tangenten sind, deren Steigung lediglich zu ermitteln ist, nennt man einen *Zirkelschluss*. So etwas muss auf jeden Fall vermieden werden. Würde man die Kenntnisse über Parabeltangenten vorher nicht erarbeiten, müsste man selbst bei Parabeln erst die Steigung bestimmen, um damit Tangenten definieren zu können. Man begäbe sich damit aber der Absicherung des neuen Verfahrens der Fehlerbereinigung.

Kommentar

Die Aufgabe, alle zunächst notwendigen Terme mit „h" zum Verschwinden zu bringen, ist der Kern der Differenzialrechnung. Die einfache Methode der „Fehlerbeseitigung" durch Subtraktion lässt sich stets bei den Sekantensteigungen der Form

$$m(x, h) = \text{Fehlerfrei}(x) + \text{Fehler}(x; h)$$

anwenden. Dies trifft bei allen ganzrationalen Funktionen zu und deswegen genügt das einfache „Fortlassen des Fehlers" für Klasse 10 vollauf. Aber das ist keine Sackgasse, sondern lässt sich sowohl über Grenzwerte als auch mittels infinitesimaler Hilfszahlen zur üblichen Analysis ausbauen. Denn nur die Begründungen, sich von den unerwünschten Termen mit h zu befreien, sind jeweils anders, didaktisch unterscheiden sie sich jedoch erheblich im Schwierigkeitsgrad für den Lernenden.

Stunde 6: Anwendungsaufgaben

Beispiel 1: (aus der offiziellen Handreichung des LISUM Berlin-Brandenburg[8])
Ein Bergbaubetrieb fördert eine bestimmtes Mineral. Dieses wird zur Zeit auf dem Weltmarkt mit 10 Tausend € pro Tonne gehandelt. Bei vollem Einsatz aller im Förderschacht nutzbaren Maschinen und Arbeitskräfte beträgt die Kapazitätsgrenze der Anlage 18 t pro Tag. Die bei der Förderung täglich anfallenden Kosten lassen sich mit der folgenden Gleichung berechnen: $k(x) = 0,2x^3 - 4x^2 + 22x + 6$, mit x = tägliche Fördermenge in Tonnen, $y = k(x)$ = Kosten (in Tausend Euro). Die Einnahmen errechnen sich bei einem Preis von 10 Tausend € / Tonne mit $e(x) = 10 \cdot x$.
Somit ergibt sich für den Tagesgewinn $g(x)$ als Tageseinnahmen minus Tageskosten :

$$g(x) = e(x) - k(x) = -0,2x^3 + 4x^2 - 12x - 6.$$

Aufgaben:
a) Die Förderanlage kann eine Tagesförderung von 0 bis 18t erbringen. In welchem Bereich treten Verluste auf ?
b) Was ist für diese Anlage ungefähr die optimale Fördermenge ?
c) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn der Anlage.
d) In welchem Bereich wirkt sich eine Erhöhung der Fördermenge besonders stark aus?
e) Wie könnte man die optimale Fördermenge bzw. den maximalen Gewinn *berechnen*, wenn die Gleichung der Ableitungsfunktion bekannt ist?
f) Angenommen, der Weltmarktpreis fällt auf 3 Tausend € pro Tonne. Die Kostenfunktion bleibt unverändert. Stellen Sie hierzu die Gewinnfunktion auf! Unter welchen Bedingungen ist dann noch Gewinn zu erwirtschaften, welche Fördermenge ist nun optimal?

Hinweis: Stellen Sie den Graphen der Gewinnfunktion g her und beantworten Sie damit die Fragen a) bis d). Für e) und f) bestimmen Sie vorher zusätzlich die Gleichungen der Ableitungen g' und g'' und zeichnen sie deren Graphen ebenfalls ein.

Kommentar

Mit Aufgaben wie dieser lässt sich die Relevanz der gelernten Methoden erfahrbar machen. Man könnte sie aber auch vor diesem Analysiswissen zur Motivation der Suche nach Tangentensteigungen heranziehen. Interessant ist dabei die Frage, wie viel es dem Bergbaubetrieb bringt, wenn er die Schätzdaten aus dem Graphen von g mittels der Rechnungen präzisiert. Auf jeden Fall bleibt richtig, dass einem Computer leichter das Rechnen als das Schätzen beigebracht werden kann.

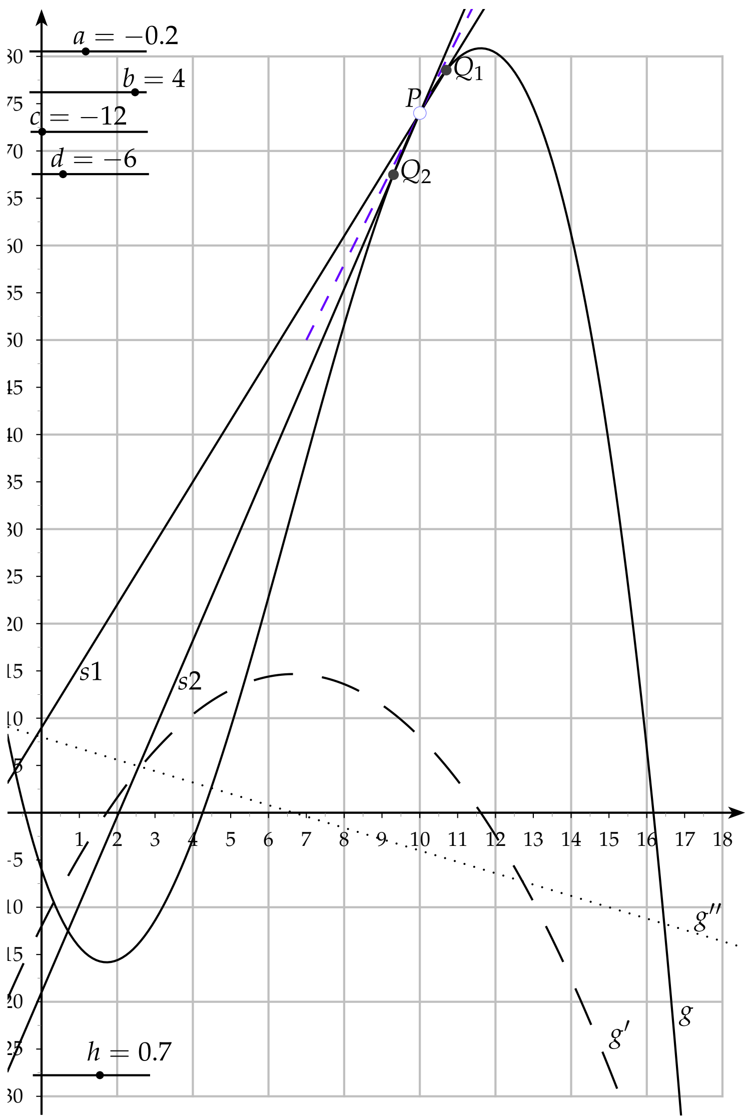
Das Bild auf Seite 14 ist eine „Momentaufnahme" einer dynamischen Geogebraseite. Hiermit lassen sich für alle ganzrationalen Funktionen bis zum Grade 3 die Zusammenhänge erleben, die zwischen Sekanten und Tangente bestehen.

[8] *Ganzrationale Funktionen — Veränderungen mit Funktionen beschreiben*; http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/HR_Funktionen_22_02_2009.pdf

Schläft ein Lied in allen Dingen .... (Eichendorf)

Verbirgt sich eine Tangente in jeder Sekante !

Wenn, wie im Beispiel, x eine Zeitgröße ist, betrachtet man die Kurven nicht unter geometrischen Aspekten. Statt dessen interessiert die Veränderung der Funktionswerte mit fortlaufender Zeit. Daher spricht man statt von *Steigung bei Kurven* von der *Änderungsrate für die Funktionswerte*. Einer Sekantensteigung entspricht eine **mittlere Änderungsrate**, einer Tangentensteigung eine **lokale Änderungsrate**.



Beispiel 2 (Freier Fall aus der Physik):

Ein wissbegieriger Mensch steht an einem Abgrund mit senkrecht abfallenden Felsen. Er möchte herausbekommen, (a) wie tief der Abgrund ist und lässt dazu einen Stein in den Abgrund fallen. Er stoppt die Zeit, bis er den Aufschlag unten hört. Außerdem interessiert ihn, (b) mit welcher Geschwindigkeit der Stein unten ankommt.

Zu (a): Der Mensch erinnert sich, dass ein fallender Stein etwa zehn Meter in einer Sekunde zurücklegt. Weil er vier Sekunden gemessen hat, berechnet er die Tiefe des Abgrundes zu vierzig Metern. Er schaut nochmals hinunter und weiß, dass er sich geirrt haben muss, der freie Fall ist ja nicht gleichförmig! Der Stein fällt nach und nach immer schneller. Nach welcher Gesetzmäßigkeit das vor sich geht, hat schon

GALILEO GALILEI (1564 - 1642) experimentell untersucht und gefunden:

$$s(t) = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 \text{, geometrisch in einem } t\text{-}s\text{-System eine Parabel.}$$

Hierin ist t die Flugzeit vom Augenblick des Loslassens und $s(t)$ die Länge des zugehörigen Fallweges. Mit diesem Gesetz erhält er die richtige Tiefe zu $s(4\,\mathrm{s}) = 5 \cdot 16\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m}$.

Zu (b): Würde der Stein in den 4s die 80m gleichförmig zurücklegen, so erhielte man gemäß „Geschwindigkeit = Weg / Zeit“ = 20 m/s. Geometrisch wird eine gleichförmige Bewegung von einer Geraden dargestellt; in diesem Fall von der Parabelsekante durch die beiden Punkte $(0\,;\,0)$ und (4 s ; 80 m).

Der Wert 20 m/s ist also die Sekantensteigung, die Ortsänderung beträgt im Mittel 20 m/s (mittlere Änderungsrate), oder die „Durchschnittsgeschwindigkeit“ ist 20 m/s, denn hier werden Änderungsraten seit alters her mit Geschwindigkeit bezeichnet.

Die Steigungsformel wird also mit anderen Buchstaben zur Formel für die Durchschnittsgeschwindigkeit $v(t\,;\,\Delta t)$:[9]

$$m(x;h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{wird zu} \qquad v(t;\Delta t) = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \,.$$

Für den freien Fall erhält man $v(t;\Delta t) = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2t + \Delta t)$. Mit $t = 0$ und $\Delta t = 4\mathrm{s}$ ergibt sich die obige Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 m/s.

Aber der Mensch möchte keine Durchschnittsgeschwindigkeit sondern die Geschwindigkeit im Augenblick des Aufpralls. Bei einer solchen „Momentangeschwindigkeit“ $v(t)$ tritt nun dasselbe Problem auf wie bei einer Tangentensteigung. Hier ist Δt das Kennzeichen für den Fehler, der auftritt, weil man eine Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet hat. Nun ist aber bereits bekannt, wie man den Fehler behebt. Man erhält

$$v(t) = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2t = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t \,.$$

Nach vier Sekunden beträgt also die Aufprallgeschwindigkeit 40 m/s = 144 km/h.

Stunde 7: Hilfen für Aufgaben, bei denen differenziert werden muss

Im Beispiel 1 der Stunde 6 sollte die Ableitung der Funktion g,

$$g(x) = e(x) - k(x) = -0,2x^3 + 4x^2 - 12x - 6,$$

gegeben sein. Eigentlich muss aber der Bearbeiter der Aufgabe über den Bergbaubetrieb diese Arbeit selbst erledigen. Damit für diesen technischen Teil nicht unnötig viel Zeit investiert werden muss, sollen einige hilfreiche Regeln zusammengestellt werden, so dass

$$g'(x) = -0,6x^2 + 8x - 12$$

direkt aus der Gleichung von $g(x)$ abgelesen werden kann.

Weil die Terme für ganzrationale Funktionen stets aus Summanden bestehen, beginnt man mit der Summe $f_1 + f_2$ zweier Funktionen f_1 und f_2 und bearbeitet ein Stück weit die Steigungsformel für die Summenfunktion f.

$$\begin{aligned} m(x;h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(f_1+f_2)(x+h) - (f_1+f_2)(x)}{h} \\ &= \frac{f_1(x+h) + f_2(x+h) - (f_1(x) + f_2)(x))}{h} \\ &= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile ist sofort ablesbar die

[9] Δt ist die Zeitspanne zwischen den beiden notwendigen Zeiten t und $t + \Delta t$.

Summenregel:	Funktionssummanden können einzeln differenziert werden. Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen.

Jeder Summand einer ganzrationalen Funktion ist von der Form $a \cdot x^n$, besteht also aus einem konstanten Faktor a und einem Funktionsterm, den man allgemein $f(x)$ schreibt. Analog wird für die nächste Regel ein Stück weit die Steigungsformel für die Funktion $a \cdot f$ bearbeitet.

$$m(x;h) \quad = \quad \frac{a \cdot f(x+h) - a \cdot f(x)}{h} = a \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Faktorregel:	Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Weil jede Differenz $a - b$ mittels des Faktors -1 in eine Summe verwandelt werden kann $[\ a - b = a + (-1)b\ ]$ und der Faktor -1 beim Differenzieren erhalten bleibt, gilt die Summenregel auch für Funktionsdifferenzen.

Eine Konstante a kann auch ohne einen Funktionsterm als einzelner Summand auftreten. Hier wird

$$m(x;h) \quad = \quad \frac{a-a}{h} = 0$$

Konstantenregel:	Ein konstanter Summand verschwindet beim Differenzieren.

Die bisherigen Regeln nehmen keinen Bezug auf die Form x^n der Funktionsterme $f(x)$. Sie gelten daher universell, nicht nur für ganzrationale Funktionen, und das war der Grund für die Benutzung der allgemeinen Schreibweise $f(x)$.

Nunmehr soll für die Terme x^n eine Regel erarbeitet werden, die spezifisch für ganzrationale Funktionen ist.

Für jede natürliche Zahl n ist x^n die Abkürzung des Produkts aus n Faktoren x. Entsprechend ist $(x+h)^n$ das Produkt aus n Klammern $(x+h)$. Solche „Binome“ werden multipliziert, indem jeder Summand mit jedem anderen multipliziert wird und diese Produkte wieder zu einer Summe zusammengeführt werden. Zum Beispiel ganz sytematisch

$$\begin{aligned}(x+h)(x+h)(x+h) &= x^3 + (x^{3-1} \cdot h + x \cdot h \cdot x + h \cdot x^{3-1}) + (x \cdot h^2 + h \cdot x \cdot h + h^2 \cdot x) + h^3 \\ &= x^3 + h \cdot 3x^{3-1} + h^2(3x+h).\end{aligned}$$

An diesem Ergebnis ändert sich prinzipiell nichts, wenn statt nur 3 Faktoren nunmehr n Faktoren betrachtet werden.

$$(x+h)^n = x^n + h \cdot nx^{n-1} + h^2 \cdot (\text{Restklammer mit } x \text{ und } h)\ .$$

Mit diesem Wissen kann man mit der Steigungsformel die Ableitung für alle Potenzen x^n bestimmen.

$$\begin{aligned} m(x;h) \quad &= \quad \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + h \cdot nx^{n-1} + h^2 \cdot (\text{Restklammer mit } x \text{ und } h) - x^n}{h} \\ &= \quad \frac{h \cdot nx^{n-1} + h^2 \cdot (\text{Restklammer mit } x \text{ und } h)}{h} \\ &= \quad n \cdot x^{n-1} + h \cdot (\text{Restklammer mit } x \text{ und } h) \end{aligned}$$

Vom Fehler-Summanden $h \cdot (\text{Restklammer mit } x \text{ und } h)$ befreit erhält man die

Potenzregel:	Die Potenz x^n liefert beim Differenzieren die Ableitung $n \cdot x^{n-1}$.

Diese vier Regeln erlauben es, jede ganz rationale Funktion rein formal zu differenzieren, indem man ihren Funktionsterm einfach abliest und entsprechend umformt.

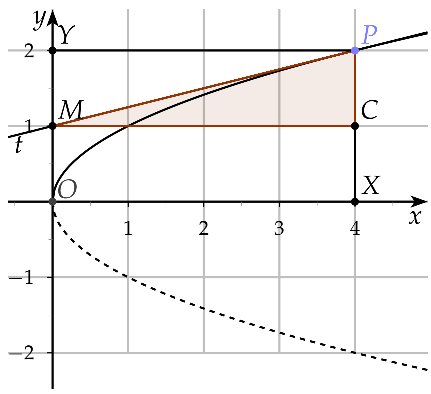
$$\begin{aligned}
g(x) &= -0,2x^3 + 4x^2 - 12x - 6 \\
&= -0,2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 6 \\
g'(x) &= -0,2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 12 - 0 \\
&= -0,6x^2 + 8x - 12 \\
g''(x) &= -1,2x + 8 \\
g'''(x) &= -1,2 \\
g''''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Diese Technik ist einfach und kostet kaum Zeit, so dass man sich dann hauptsächlich auf die Interpretation für den Bergbaubetrieb konzentrieren kann.

Stunde 8: Grenzen der bisherigen Methode zum Differenzieren

Voraussetzung für das Fehlerbeseitigungsverfahren ist, dass es sich nur um Summanden als Fehler handelt. Ist es nicht möglich, $m(x,h)$ in diese Form zu bringen, kann das Verfahren nicht mehr benutzt werden. Dazu als Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$,

$$m(x;h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$



In diesem Fall kann man sich aber leicht helfen. Die Funktion $f\colon x \longmapsto \sqrt{x}$ ist nämlich die Umkehrfunktion zu $\sqrt{x} \longmapsto x$ oder, für $y \geq 0$, $y \longmapsto y^2$, wenn man $y := \sqrt{x}$ definiert. Die Koordinaten eines Punktes P auf dem Graphen werden lediglich im ersten Fall von X aus über P nach Y gefunden und im zweiten Fall umgekehrt von Y aus über P nach X.
Der Graph der Wurzelfunktion ist also eine (halbe) Parabel. Diese besitzt in jedem Punkt eine Tangente t. Beim Steigungsdreieck werden lediglich Gegenkathete und Ankathete vertauscht. Was die Maßzahlen angeht, bleibt alles unverändert. Man kann also ablesen:

$$m(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x).$$

Wenn man dieses Ergebnis auswendig gelernt hat, kann man sofort die Ableitung z. B. an der Stelle 4 angeben: $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Das geht viel schneller als wenn erst eine Formelsammlung bemüht werden muss (man vergleiche mit der Abbildung).

Aber nun ein Beispiel, bei dem man nicht auf eine bekannte Funktion zurückgreifen kann. Es soll sich zwar weiterhin um Potenzen handeln, jedoch mit vertauschten Rollen von Basis und Exponent, statt x^2 also 2^x. Funktionen dieser Art heißen Exponentialfunktionen. Hier liefert die Steigungsformel

$$m(x;h) = \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \cdot \frac{2^h - 1}{h} \ .$$

Spätestens für solche Funktionen braucht man anstelle der Fehlerbereinigung eine neue Idee für den Umgang mit h.

Stunde 9: Über die Ideen von NEWTON, LEIBNIZ und ROBINSON

Grundlage für eine neue Idee ist folgende Überlegung: Wenn ich den Fehler nicht beseitigen kann, muss ich ihn so klein halten, dass er nicht stört.
Dieser Gedanke wird bis zum heutigen Tag von Ingenieuren wörtlich genutzt. Falls für ein neuartiges Problem noch keine mathematische Formel existiert, so berechnet man aus Messdaten $(x_i\,; f(x_i))$ Sekantensteigungen. Wie dicht die Messdaten gewählt werden, hängt von den Anforderungen an die Genauigkeit ab. Man rechnet dabei auf mehr Stellen genau, als eigentlich gebraucht werden, und lässt anschließend überzählige Stellen fort.

Fehlerbehaftete Ergebnisse befriedigen einen Mathematiker jedoch grundsätzlich nicht. NEWTON sprach deshalb davon, die Formeln in dem Moment zu erhalten, wenn die Fehler „gerade im Verschwinden begriffen" sind[10]. Für diesen schwammigen Begriff wurde er von der Kirche verhöhnt, hatte er doch die Klarheit der Mathematik verächtlich über das Unklare in der Religion erhoben.

LEIBNIZ ging von der Vorstellung aus, dass Fehler nicht mehr stören, wenn sie „unendlich klein" oder „infinitesimal" sind. Was das aber präzise heißen soll, konnte er auf dem Stand der damaligen Mathematik nicht formulieren. Der intuitive Umgang mit dem Unendlichen brachte daher auch falsche Resultate zu Tage, sodass seine Idee schließlich nicht mehr verfolgt wurde. Dennoch wurde seine *Infinitesimalrechnung* ein Erfolg, vor allem wegen seiner ausgefeilten Schreibweise mit *Differenzialen*, die durch ihre Struktur helfen, zu richtigen Ergebnissen zu kommen.

Erst 1961 hat ROBINSON die Idee infinitesimaler Elemente in seiner *Nonstandard-Analysis* auf eine solide Basis gestellt. Von Ingenieuren inspiriert, mit denen er im Krieg zusammenarbeitete und die zunächst mit einer größeren Zahlenmenge arbeiten und anschließend das Ergebnis auf die geforderte Form bringen, kam er auf die Idee, den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu erweitern. In dieser Erweiterung konnte er zusätzliche infinitesimale Zahlen unterbringen. Dabei ließ er sich von der LEIBNIZ-Idee leiten, dass die Rechenregeln im Unendlichen mit denen im Endlichen übereinstimmen. Sein Ziel war also, den umfassenderen Körper $^\star\mathbb{R}$ der *hyperreellen Zahlen* zu erfinden.

Häufig wird angezweifelt, dass dieses Ziel überhaupt erreicht werden kann, weil der Körper der reellen Zahlen doch vollständig (angeordnet) sei. Das bedeutet aber nur, dass die Wiederholung des Prozesses,

[10] Diese Grundvorstellung wurde später mit dem Grenzwertbegriff präzisiert.

reelle Zahlen aus den rationalen Zahlen herzustellen, nicht weiterführt, wenn man von reellen Zahlen ausgeht. Z. B. liefert die bekannte Intervallschachtelung zur Frage der (positiven) Lösung von $x^2 = 2$ kein rationales Ergebnis und kann daher zur Definition der neuen Zahl $\sqrt{2}$ genutzt werden. In $\mathbb{R}$ aber liefert jede Intervallschachtelung bereits eine reelle Zahl. Es kann also mit dieser Methode kein neues Objekt definiert werden.

Damit ist aber nicht gesagt, dass es keine andere Methode geben kann, die zusätzliche Zahlen erzeugt. Man denke nur daran, wie bereits im 16. Jahrhundert zaghaft die komplexen Zahlen erfunden wurden. Man suchte nach Zahlen, mit denen man auch Gleichungen der Art $x^2 + 1 = 0$ lösen kann. Und die mutige Forderung, es möge wenigstens die Zahl $\sqrt{-1}$ geben, führte bis zur heutigen (komplexen) Funktionentheorie.

Stunde 10: Einführung infinitesimaler hyperreeller Zahlen

Abweichend von ROBINSONs Originalarbeit, die für die Schule viel zu schwierig ist, sollen hier auf einfache Weise nur die infintesimalen Zahlen eingeführt werden. Sie schaffen zugleich auch die endlichen oder *finiten* hyperreellen Zahlen und damit alles, was zum Differenzieren gebraucht wird.

Wenn man mit LEIBNIZ an infinitesimale Zahlen denkt, hat man es mit einer Vorstellung von Zahlen zu tun, die von den bisher bekannten reellen Zahlen grundsätzlich verschieden sind. Dennoch muss man mit ihnen rechnen können und zwar zusammen mit den reellen Zahlen nach deren Rechenregeln. Jede dieser erträumten Zahlen muss unendlich klein sein, d. h. derart winzig, dass jede reelle Zahl im Vergleich zu ihr ein Riese ist. Ausgenommen die Null, die ihrer Größe nach natürlich nicht zu unterbieten ist.

Ganz entsprechend den Erfahrungen mit den komplexen Zahlen wird also gefordert:

> Es möge eine von Null verschiedene Zahl α_0 geben, die kleiner ist als jede positive reelle Zahl und zugleich größer als jede negative reelle Zahl.
> Alle Rechenarten sollen auch zwischen α_0 und einer reellen Zahl nach den bekannten Regeln möglich sein.

Ausgehend davon, dass die Existenz der wahrhaftig winzigen neuen Zahl α_0 gesichert ist, soll zunächst das Rechnen mit ihr untersucht werden.

Die erste Frage soll sein: Ist die mit einem (großen) reellen Faktor r vergrößerte Zahl $r \cdot \alpha_0$ immer noch infinitesimal oder aber bereits größer als eine angebbare reelle Zahl s?

(Eigentlich sollte das Produkt von unendlich klein mal endlich groß weiterhin unendlich klein sein, sonst würde ja ein endliches Werkzeug das Unendliche zerstören können.)

Die Argumentation erfolgt indirekt.

Voraussetzung: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : -x < \alpha_0 < x$.

Behauptung: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{R} : -x < r \cdot \alpha_0 < x$.

Annahme: Für $r > 0 : \exists s \in \mathbb{R}^+ : s < r \cdot \alpha_0$. (Für $r < 0$ analog.)

Folgerungen aus der Annahme:

$s < r \cdot \alpha_0 \implies (\alpha_0 > \frac{s}{r} \wedge \frac{s}{r} \in \mathbb{R}^+)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Annahme muss also falsch sein und daher die Behauptung richtig.

Das bedeutet: Es gibt zu jeder reellen Zahl r eine infinitesimale Zahl, nämlich $r \cdot \alpha_0$. D. h. es gibt mit α_0 unendlich viele infinitesimale Zahlen. Alle liegen sie in infinitesimaler Nähe der Null, welche die einzige reelle Infinitesimalzahl ist, weil auch sie sich zwischen allen positiven und allen negativen reellen Zahlen befindet. Die Null hat sozusagen eine infinitesimal dünne Haut aus den neuen Zahlen bekommen.

Innerhalb dieser Haut kann addiert und auch multipliziert werden. Summen und Produkte zweier infinitesimaler Zahlen sind nämlich wieder infinitesimal. Denn seien α und β infinitesimale Zahlen und z. B. $0 < \alpha < \beta$, dann ist $\alpha + \beta < 2\beta$. Die Summe ist also kleiner als eine infinitesimale Zahl, muss daher selbst auch infinitesimal sein. (Andere Konstellationen von α und β können analog behandelt werden.)

Weil α und β dem Betrage nach jeweils kleiner als 1 sind, ist der Betrag ihres Produkts kleiner als jeder dieser (infinitesimalen) Faktoren und daher auch selbst infinitesimal.

Die wichtigsten Zahlen für das Differenzieren sind Summen von zwei Summanden, einem reellen und einem infinitesimalen: $r + \alpha$. Für : $\alpha \neq 0$ sind sie also weder reell noch infinitesimal. Man nennt sie *hyperreelle Zahlen*, genauer ***finite*** *hyperreelle Zahlen*, weil sie in unmittelbarer (infinitesimaler) Nähe der endlichen (finiten) Zahl r liegen.

Die finiten hyperreellen Zahlen besitzen eine entscheidende Eigenschaft: sie lassen sich nur auf eine einzige Weise als Summe $r + \alpha$ schreiben.

Wäre nämlich $s + \beta$ eine zweite Schreibweise für dieselbe Zahl, dann müsste $r + \alpha = s + \beta$ gelten. Umgeformt ergibt sich daraus: $r - s = \beta - \alpha$. Links steht dann eine reelle, rechts eine infinitesimale Differenz. Es gibt aber nur die Zahl 0, welche beide Eigenschaften auf sich vereint. Demnach muss $r = s$ und $\beta = \alpha$ gelten, die beiden Darstellungen können sich nicht unterscheiden.

Jede finite hyperreelle Zahl m besitzt also ihren eigenen **reellen Teil** r und ihren eigenen **infinitesimalen Teil** α,

$$m = r + \alpha.$$

Hier lohnt sich der Vergleich mit der Zusammenfassung im Kommentar zur 5. Stunde:

$$m(x,h) = \text{Fehlerfrei}(x) + \text{Fehler}(x;h) \ .$$

Man erkennt, wie gut die Struktur der finiten hyperreellen Zahlen der Erfahrung beim Differenzieren ganzrationaler Funktionen entspricht. Der entscheidende Vorteil der hyperreellen Zahlen besteht darin, dass <u>jedes</u> Ergebnis beim Differenzieren diese Form besitzen muss (sonst ist das Bestimmen einer Tangentensteigung oder einer lokalen Änderungsrate prinzipiell unmöglich). Das Eingangsbeispiel aus Stunde 5 zeigt, wie gering der Unterschied ist, wenn infinitesimale Abstände h, $h \neq 0$, benutzt werden: Man berechne zu $f(x) = x^2$ die Tangentensteigung an der Stelle 2,34 (vgl. Stunde 5).

$$m(2{,}34\ ;\ h) = \frac{(2{,}34 + h)^2 - 2{,}34^2}{h} = \frac{(2{,}34^2 + 2h \cdot 2{,}34 + h^2) - 2{,}34^2}{h} = 4{,}68 + h.$$

Bislang hieß es: **Nimm der fehlerhaften Sekantensteigung ihren Fehler *h* weg!**

Nunmehr: **Nimm der hyperreellen Sekantensteigung ihren infinitesimalen Teil *h* weg!**

Dem Herauspicken des fehlerfreien Anteils als Tangentensteigung entspricht also der Rückgang von m auf seinen reellen Teil. Es gibt deshalb dafür auch eine Kurzschreibweise in algebraischen Ausdrücken:

$$\text{RT}(m) = \text{RT}(r + \alpha) = r\,,$$

wobei RT für *reeller Teil von* steht. Auch die üblichen reellen Zahlen lassen sich als hyperreelle deuten, nämlich als diejenigen, die mit ihrem reellen Teil übereinstimmen oder deren infinitesimaler Teil 0 ist. (Das entspricht dem Erkennen rationaler Zahlen im Reellen an ihrer Dezimalperiodizität.)

Daher sei nun auch das Beispiel 2 aus der 5. Stunde als Muster wiederholt. Gegeben sei also die Funktion dritten Grades mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Gesucht ist ihre Ableitung $f'(x)$ für jede Stelle x.

Äußerlich ändert sich gar nichts; es werden die Sekantensteigungen $m(x,h)$ für $h \neq 0$ berechnet.

$$\begin{aligned} m(x,h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{((x+h)^3 - 3(x+h)^2 - (x+h) + 3) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - 3h^2 - h}{h} \\ &= (3x^2 - 6x - 1) + (3xh + h^2 - 3h) \end{aligned}$$

Innerlich aber wird alles hyperreell interpretiert.[11]

[11] Das ist möglich, weil dieselbe Rechenstruktur weiterhin besteht.

Um das Ergebnis als finite hyperreelle Zahl erkennen zu können, genügt es, die Größe h infinitesimal zu wählen.
Weil die gesuchte Ableitung eine reelle Größe ist, wird lediglich der reelle Teil von $m(x;h)$ benötigt.

$$f'(x) = \mathrm{RT}(m(x;h)) = (3x^2 - 6x - 1).$$

Warum ist die erste Klammer vom hyperreellen $m(x;h)$ ihr reeller Teil?
Antwort: Der Buchstabe x bezeichnete schon in der Aufgabenstellung eine reelle Zahl, woran sich nichts ändert, selbst wenn man sie vorübergehend mit hyperrellen Augen betrachtet. Der algebraische Ausdruck in der Klammer ist daher nach wie vor ebenfalls reell.
Warum ist die zweite Klammer $(3xh + h^2 - 3h)$ von $m(x,h)$ der infinitesimale Teil?
Antwort: h ist definitionsgemäß eine von 0 verschiedene Infinitesimalzahl. $3x$ ist ein reeller Faktor und somit ist $3xh$ ebenfalls infinitesimal. Dasselbe gilt für den Summanden $3h$. Schließlich ist h^2 als Produkt zweier Infinitesimalzahlen ebenfalls infinitesimal. Damit ist auch die Summe dieser drei Ausdrücke infinitesimal, also insgesamt der infinitesimale Teil α von $m(x;h)$. Weil er in $\mathbb{R}$ keine Bedeutung besitzt, wird er weggelassen.
Das Differenzieren einer reellen Funktion f erfolgt also prinzipiell in drei Schritten.
Gegeben sei eine reelle Funktion f mit ihrem Funktionsterm $f(x)$, gesucht ist an einer Stelle x die zugehörige Ableitung $f'(x)$.

1. Man bestimme den Differenzenquotienten (Sekantensteigung, mittlere Änderungsrate) $m(x;h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ mit einem von 0 verschiedenen infinitesimalen h.
2. Man bringe $m(x;h)$ auf die Form $r + \alpha$ einer finiten Zahl.
3. Die gesuchte Ableitung ist $f'(x) = \mathrm{RT}(m(x;h)) = r$.

Damit man alle drei Schritte durchführen kann, muss f zwei Eigenschaften haben:

(a) Die Funktion f muss von $\mathbb{R}$ auf ${}^\star\mathbb{R}$ erweitert werden können, d. h. $f(x)$ muss hyperreell interpretierbar sein.

(b) Der Differenzenquotient $m(x;h)$ muss eine finite Zahl sein, um in die Form $r + \alpha$ gebracht werden zu können. Die Differenz der Funktionswerte $f(x+h) - f(x)$ muss also proportional zu h sein (mit einem finiten Proportionalitätsfaktor $k(h)$, $k(h) = r + \alpha(h)$, r konstant.

Dann und nur dann wird $m(x;h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k(h)\cdot h}{h} = k(h) = r + \alpha(h)$.

Eigenschaft **(b)** gibt Anlass zu folgenden Definitionen:

Eine Funktion f heißt **differenzierbar** genau dann, wenn sie jede infinitesimale Differenz h in eine dazu proportionale Differenz $k(h) \cdot h$ mit $k(h) = r + \alpha(h)$ und r konstant der zugehörigen Funktionswerte abbildet.

Eine Funktion f heißt **stetig** genau dann, wenn sie jede infinitesimale Differenz h in eine ebenfalls infinitesimale Differenz der zugehörigen Funktionswerte abbildet.

Man erkennt sofort, dass zwar jede differenzierbare Funktion auch stetig sein muss, nicht aber umgekehrt.

Stunde 11: Anschauliches Differenzieren mit hyperreellen Zahlen

Welche geometrische Vorstellung kann man sich vom Differenzieren machen? Dazu sei das Beispiel $f(x) = x^3$ an der Stelle 2 benutzt. Zum Punkt P auf dem Graphen von f, $P = (2\,;8)$, soll die Tangentensteigung berechnet werden. Mit der von null verschiedenen horizontalen Differenz h wird als Hilfspunkt der Punkt Q auf dem Graphen benutzt, $Q = (2+h\,;(2+h)^3)$.

Vor nun an ist es sehr nützlich, wenn Sie, verehrte(r) Leser(in), das folgende Spiel aktiv mitspielen.

Wir legen in Gedanken die reelle Koordinatenebene auf den Boden und stellen uns direkt auf P. Es sei nun $h = 1$, der Punkt Q ist also $(3\,;27)$. Damit wir bequem den Punkt Q sehen und auch die Kurve mindestens zwischen P und Q gut überschauen können, passen wir unsere Körpergröße der Zeichnung unter uns an. Je nachdem strecken wir uns in Richtung Riese oder schrumpfen in Richtung Zwerg, das ist auch eine Frage des Maßstabs der reellen Ebene. Wir sehen Q in einiger Entfernung und zwischen Q und unserem Standpunkt P ein Stück der wohlbekannten Kurve zu f. Auch die Strecke $\overline{PQ}$ ist gut zu sehen, wie sie die beiden Punkte geradlinig verbindet, das Stück einer Sekante eben, deren Steigung man bestimmen kann.

Wir ändern h in seiner Größe ab. h ist aber weiterhin reell. Dann ändert sich an der Szene nicht viel, nur die Biegung der Kurve zwischen P und Q wird mehr oder weniger ausgeprägt.

Alles ändert sich aber, wenn h infinitesimal gewählt wird. Dann kann Q überhaupt nicht gefunden werden, weil seine Koordinaten nicht mehr reell sind. Der Ausweg bleibt, von der reellen Ebene zur hyperreellen überzugehen. Wenn man aber sonst nichts ändert, können wir Q dennoch nicht sehen, weil kein Unterschied zu P erkannt werden kann; Q liegt schließlich in der „infinitesimalen Haut" von P. Erst wenn wir uns in infinitesimale Zwerge verwandeln, können wir in diese Haut hinein und sehen jetzt die neue Situation: P ist nach wie vor unter unseren Füßen. Zu Q gelangen wir, wenn wir einen infintesimalen Zwergenschritt nach rechts gehen und 12 solche Schritte nach oben. Unsere Sekantensteigung wird nämlich zu $\frac{\mathbf{12}h+6h^2+h^3}{h}$ berechnet. Unabhängig von der Wahl von h, $h \neq 0$, sind die beiden anderen Summanden $6h^2 + h^3$ relativ zu h weiterhin infinitesimal, wir können selbst als Zwerge der Größenordnung h ihren Einfluss nicht sehen[12]. Die Strecke $\overline{PQ}$ hat also die „sichtbare" Steigung 12.

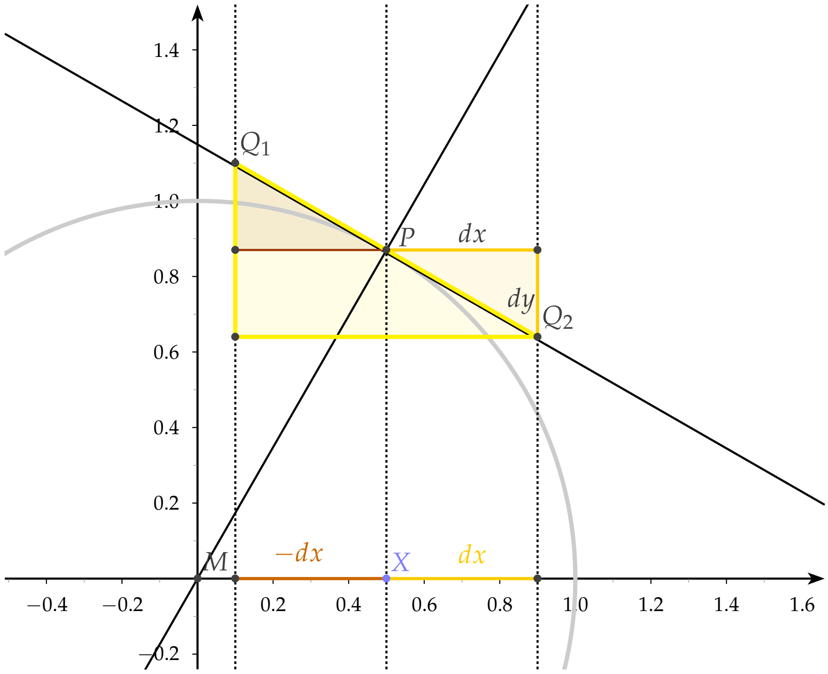
Interessant ist jetzt der Vergleich dieser Strecke mit dem Kurvenverlauf zwischen P und Q. Als Testpunkt soll der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$, $M = (2+\frac{1}{2}h\ ;\ 8+6h)$, gewählt werden. Senkrecht darüber liegt der Kurvenpunkt K, $K = (2+\frac{1}{2}h\ ;\ 8+6h+\frac{3}{4}h^2+\frac{1}{8}h^3)$. Er ist selbst für uns als infinitesimale Zerge von M nicht zu unterscheiden. Kurve und Strecke $\overline{PQ}$ sind also in diesem Sinne identisch.

Jede Strecke $\overline{PQ}$ kann zur Geraden PQ erweitert werden, ohne dass sich an der reellen Steigung 12 etwas ändert. Auch der Punkt P hat reelle Koordinaten. Bei der Rückkehr aus dem hyperreellen ins reelle bleiben diese Informationen erhalten, so dass eine bestimmte reelle Gerade aus einem Punkt und ihrer Richtung definiert ist. Ihre Entstehungsgeschichte ist im Namen *Tangente* aufbewahrt.

LEIBNIZ konnte zwar noch nicht mit hyperreellen Zahlen die Anschauung hinterlegen, aber er hatte diese Bilder vom unendlich Kleinen durchdacht vor Augen. So sprach er davon, dass man sich Kurven als aus unendlich kleinen Strecken aufgebaut denken kann. Ein Kreis ist z. B. ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen Ecken. Seine Tangenten sind nichts anderes als die Verlängerungen solcher Strecken. Ihre Steigung wird (wie jede Steigung überhaupt) als Bruch oder Quotient von Differenzen angegeben. Im Falle einer Tangente müssen diese Differenzen unendlich klein sein. Er benutzte daher statt des Δ für endliche Differenzen als besonderen Buchstaben das d. Für $y = f(x)$ bedeutet auch heute noch $\frac{dy}{dx}$ den Anstieg einer Tangente. Die unendlich kleinen Differenzen dy und dx nannte er zur Unterscheidung *Differenziale*. Das Berechnen von *Differenzialqotienten* $\frac{dy}{dx}$ wurde *Differenzialrechnung* genannt. Aus ihr entwickelte sich die *Analysis*, weil man bemerkte, dass man das Unendliche schärfer analysieren musste.

Am Beispiel der Kreistangente soll nun gezeigt werden, wie allein mit der geometrischen Vorstellung Ergebnisse gefunden werden können. Das Bild dazu auf Seite 23 ist eigentlich ein Doppelbild. denn es zeigt nicht nur ein normales reelles Koordinatensystem mit dem Einheitskreis, sondern auch ein Bild aus der infinitesimalen Welt. So kann man bei Bedarf leicht aus der einen Welt in die andere hineinsehen.

[12] Würden wir uns in die Dimension h^2 verkleinern, könnten wir den Summanden $6h^2$ zwar betrachten, aber das Steigungsdreieck zwischen P und Q wäre unendlich groß und damit unüberschaubar.



Vorausgesetzt wird, dass der Kreis diejenige Figur ist, bei der je zwei ihrer Punkte eine Symmetrieachse besitzen, die immer durch einen Punkt verläuft, den Mittelpunkt M des Kreises. Auf diesem Kreis wurde der (reelle) Punkt P gewählt, $P = (x\,;\,y)$, und die Frage nach der zugehörigen Kreistangente gestellt.

Nun geht es in die infinitesimale Umgebung von P. Zusätzlich sind zwei Kreispunkte Q_1 und Q_2 eingezeichnet, mit Ihren x-Koordinaten $x - dx$ und $x + dx$, $dx \neq 0$ infinitesimal. Sowohl die Strecke $\overline{PQ_1}$ als auch $\overline{PQ_2}$ kann zur Berechnung des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ herangezogen werden. Die Ergebnisse dürfen sich nicht unterscheiden, weil sie unabhängig von der Wahl des dx sind. Somit bilden sie zusammen die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$.

Nun sei ihre Symmetrieachse betrachtet: Sie muss durch den Kreismittelpunkt M gehen, denn Q_i sind Kreispunkte. Sie muss aber auch durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ verlaufen und diese senkrecht schneiden.

Wieder zurück in der reellen Welt, erkennt man die altbekannte Aussage, dass jede Kreistangente senkrecht zu ihrem Berührungsradius steht.

Stunde 12: Erstes Beispiel zur Differenzialrechnung nach Leibniz

Die obere Hälfte des Einheitskreises kann als Graph der Funktion f mit $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$ aufgefasst werden. Zu jedem x, $-1 \leq x \leq 1$, wird der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ gesucht.

Soll z. B. für $x = \frac{1}{2}$ das zugehörige y berechnet werden, erhält man zunächst nur das Zwischenergebnis $z = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Daraus muss anschließend die Wurzel gezogen werden: $y = \sqrt{z} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die Funktion f ist also aus zwei Funktionen f_1 und f_2 zusammengesetzt, $f_1(x) = z = 1 - x^2$ und $f_2(z) = y = \sqrt{z}$; $f : x \longmapsto z \longmapsto y$.

Beide einzelnen Funktionen sind differenzierbar und ihre Ableitungen sind bereits bekannt:

$$f_1'(x) = \frac{dz}{dx} = -2x \quad \text{und} \quad f_2'(z) = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Die Differenzialquotienten geben sofort den Hinweis, wie aus den bekannten der gewünschte Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ gebildet werden muss, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Natürlich wird jeder an das Kürzen von dz denken. Aber kann man das auch wirklich? Dazu sei die Herstellung eines Differenzialquotienten genauer betrachtet.

Sei $y = f(x)$ die Gleichung einer beliebigen differenzierbaren Funktion. Zu jeder horizontalen Änderung h der x-Werte erzeugt sie die zugehörige vertikale Änderung v. Für $h \neq 0$ wird nun der Differenzenquotient (die Änderungsrate oder Sekantensteigung) $\frac{v}{h}$ berechnet. Das funktioniert im Reellen wie im Hyperreellen.

Nun wird h infinitesimal gewählt und daher als Differenzial dx benannt, die Wahl ist dabei vollkommen frei, sofern $dx \neq 0$ nicht verletzt wird. Damit ist auch v infinitesimal, weil f stetig ist. Das bedeutet aber NICHT, dass es schon ein Differenzial sei! Denn $\frac{v}{dx}$ ist nur eine finite hyperreelle Zahl, also nicht unbedingt reell. Dazu muss man zu ihrem reellen Teil $\mathrm{RT}(\frac{v}{dx})$ übergehen, denn nur er hat im Reellen einen Sinn.

Hiermit ist das Differenzieren abgeschlossen und die Ableitung $f'(x)$ berechnet. Jetzt erst kann man im Hyperreellen das Differenzial dy definieren, nämlich: $dy := f'(x) \cdot dx$. Hiermit ist nämlich gewährleistet, dass der Differenzialquotient trotz infinitesimalen Zählers und Nenners reell ist: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \mathrm{RT}(\frac{v}{dx})$.

Festzuhalten ist: Während dx frei wählbar ist, hängt dy von dieser Wahl und der Eigenschaft der Funktion an der Stelle x ab.

Damit lässt sich die Frage nach dem Kürzen positiv beantworten: im Bruch $\frac{dz}{dx}$ ist dx frei und dz festgelegt; im Bruch $\frac{dy}{dz}$ ist dz frei, wird also so gewählt, wie es sich im Bruch zuvor ergeben hat. Damit ist das Kürzen immer möglich, sofern im ersten Bruch nicht $dz = 0$ entstanden ist. Das aber wäre nicht schlimm, denn es bedarf hier keines Kürzens. Mit beliebigem brauchbarem dz im Nenner ergibt sich $\frac{dy}{dx} = 0$, und das stimmt, weil in diesem Fall f_1 und damit auch f konstant ist.

Dieses Beispiel gehört zu dem sehr häufigen Fall der *Verkettung* zweier Funktionen, bei der eine Funktion f dadurch definiert ist, dass zunächst eine Funktion f_1 ausgeführt wird und anschließend eine Funktion f_2, die aus dem Zwischenergebnis den Funktionswert $f(x)$ liefert[13].

$$f : x \xmapsto{f_1} z \xmapsto{f_2} y \qquad f(x) = f_2(f_1(x)) \qquad f = f_2 \circ f_1.$$

Es lohnt sich deshalb, das Differenziazionsergebnis als eine weitere Regel (zu denen aus Stunde 7) auswendig zu lernen. Hier ist die Schreibweise mit Differenzialquotienten unschlagbar. Kennt man sie, darf man die Term- und Funktionsschreibweise getrost vergessen — sie verkomplizieren die einfache Regel unverhältnismäßig.

Kettenregel: Ist f die Verkettung zweier Funktionen f_1 und f_2, d. h. $f : x \xmapsto{f_1} z \xmapsto{f_2} y$, so ist ihre Ableitungsfunktion f' das Produkt der beiden Ableitungen ${f_1}'$ und ${f_2}'$.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} = {f_1}'(x) \cdot {f_2}'(z) = {f_1}'(x) \cdot {f_2}'(f_1(x))$$

Stunde 13: Anschauliches Differenzieren der Kreisfunktion Sinus

Die Ausdrücke „$\sin(\alpha)$" und „$\sin(x)$" werden als bekannt vorausgesetzt. Die Buchstaben α und x bedeuten beide die Größe eines Winkels. Die Angaben $\alpha = 60°$ und $x = \frac{\pi}{3}$ geben dieselbe Winkelgröße an,

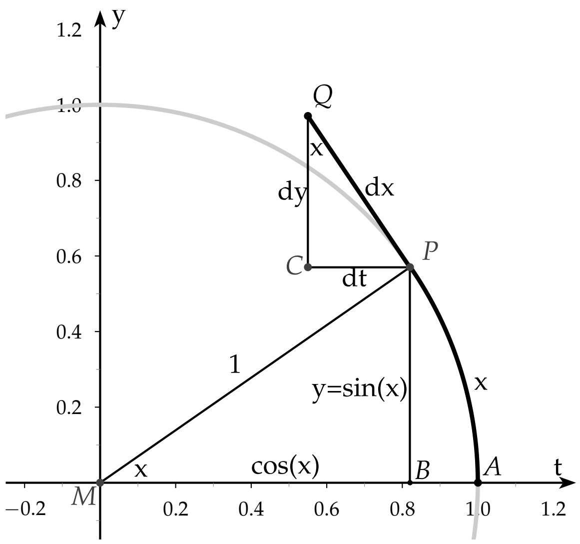
[13]Man beachte die unterschiedliche Reihenfolge der Funktionssymbole in den gängigen Schreibweisen. ($f = f_2 \circ f_1$ wird deshalb gelesen als $f = f_2$ nach f_1.)

jedoch einmal im Gradmaß und das andere Mal im Bogenmaß. Weil das Bogenmaß stets eine normale reelle Zahl ist, wird die Sinusfunktion für das Differenzieren immer als $x \longmapsto \sin(x)$ geschrieben.

In der folgenden Zeichnung wird x deshalb nicht auf der horizontalen Achse des Koordinatensystems abgetragen sondern vom Punkt A aus auf dem Einheitskreis, welcher den Radius 1 besitzt und nicht etwa 1 cm. Der Kreisbogen $\widehat{AP}$ stellt somit das Bogenmaß x für den Winkel $\angle(AMP)$ dar, der Buchstabe x wird deswegen in der Spitze des Winkels bei M wiederholt. Die Ordinate $\overline{BP}$ des Punktes P gibt den Funktionswert $\sin(x)$ oder kurz y an.

Als Variable für die horizontale Koordinatenachse wird der Buchstabe t benutzt.

Zum Differenzieren werden infinitesimale Größen gebraucht, die in der Zeichnung im Punkt P verschwinden. Wie schon in der vorigen Stunde wird daher ein zweites Bild einbezogen, welches die sonst nicht sichtbaren Einzelheiten beinhaltet, wenn x um $dx \neq 0$ verändert wird. Man stelle sich also vor, dass der Punkt Q infinitesimal dicht bei P auf dem Kreis liegt. Dann braucht man zwischen Kreis und Tangente nicht zu unterscheiden, und das vergrößerte Dreieck PQC zeigt auch die Änderung dy. Der gesuchte Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ lässt sich direkt ablesen, eben weil Q auf der Kreistangente durch P gewählt wurde, deren Steigung als Differenzialquotient $\frac{dy}{dt}$ bereits gewonnen wurde.
Hier zahlt sich das Konzept der Differenzialquotienten aus: obwohl Zähler und Nenner infinitesimal sind, ist der Bruch reell. In diesem Fall ist $\frac{dy}{dt} = \cot(x)$, denn das rechtwinklige Dreieck PQC besitzt bei Q einen Winkel, der die Größe x haben muss. Seine Schenkel $\overline{QC}$ und $\overline{QP}$ stehen nämlich paarweise senkrecht zu den Schenkeln $\overline{MB}$ und $\overline{MP}$. Die beiden Dreiecke PQC und PMB sind daher einander ähnlich — obwohl sie aus verschiedenen Welten stammen. Der gesuchte Quotient $\frac{dy}{dx}$ lässt sich also auch aus dem reellen Dreieck PMB entnehmen.



Ergebnis:

$$\boxed{\sin'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{QP}|} = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{MB}|}{1} = \cos(x).}$$

Hinweis:
Für $x = 0$ und für $x = \pi$ liegt der Punkt P auf der t-Achse, für $x = \frac{\pi}{2}$ sowie $x = \frac{3}{2}\pi$ liegt P auf der y-Achse. In diesen Fällen „entartet“ das Steigungsdreieck PQC. Mit Geogebra kann man sehr schön verdeutlichen, was damit gemeint ist und die Werte von $\frac{dy}{dx}$ dennoch ermitteln; sie passen zum allgemeinen Ergebnis $\sin'(x) = \cos(x)$.

Stunde 14: Zur Ableitung einer Exponentialfunktion

Terme der Form a^b beschreiben Potenzen. Für diese gilt u. a. die für das folgende wichtige Regel $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$. Wählt man die Basis variabel, $a = x$, den Exponenten jedoch fest, z. B. $b = 2$, entsteht eine Potenzfunktion $x \longmapsto x^2$. Solche Funktionen lassen sich besonders einfach differenzieren (s. o.).

Lässt man hingegen die Basis a fest, $(a > 0)$, und benutzt einen variablen Exponenten, $b = x$, so erhält man eine *Exponentialfunktion*, $x \longmapsto a^x$.

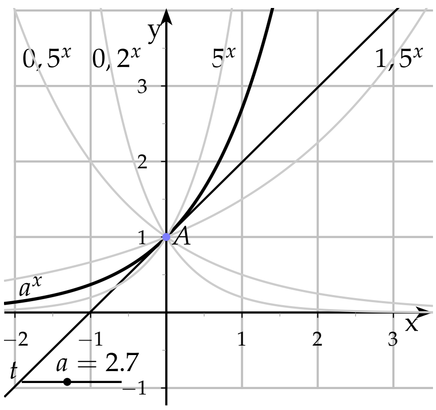
Hier gestaltet sich das Differenzieren wirklich schwierig, denn es gibt keine Hilfsfunktionen, von denen man die Differenzierbarkeit kennt und sich daran ein abgesichertes infinitesimales Bild machen kann. Was bleibt, ist der Rückgriff auf die Definition der Ableitung. Mit den ursprünglichen Bezeichnungen wird daher der Differenzenqotient $\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$ untersucht. Die genannte Potenzregel ergibt $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$, und damit lässt sich folgende Umformung erreichen:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \frac{a^{0+h} - a^0}{h}.$$

Lässt man h von null verschieden und infinitesimal sein und geht beim 1. und 4. Term der Gleichungskette zum reellen Teil über, so ergibt sich mit $f(x) := a^x$ eine erfreuliche Aussage:

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

Jede Exponentialfunktion ist an jeder Stelle x differenzierbar, sofern die Ableitung an der Stelle 0 existiert. Man benötigt also nur die Untersuchung bei 0 und kann sich eine allgemeine Untersuchung sparen. Aber selbst die Berechnung von $f'(0)$ ist mit den bislang zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln zu komplex für den Unterricht. Am einfachsten ist es daher, hier die Differenzierbarkeit bei 0 einfach vorauszusetzen.



Zur Unterstützung der Überzeugung, dass der Graph einer Exponentialfunktion die y-Achse so schneidet, dass von einer Tangente die Rede sein muss, kann man Geogebra heranziehen. Wie die Abbildung zeigt, erhält man die Graphen zu a^x, wenn man a mittels Schieberegler verändert[14] . Dabei lässt sich ohne Aufwand die jeweilige Tangente durch A ebenfalls zeichnen und erkennen, dass ihre Steigung von der Basis abhängt.

Algebraisch lässt sich das Resultat ebenfalls finden, wenn man voraussetzt, dass jede Exponentialfunktion bei 0 die Definition der Differenzierbarkeit aus Stunde 10 erfüllt[15] . Dies ist der historische Weg, den EULER beschritten hat.

Der Differenzenquotient lässt sich damit für infinitesimale h umformen:

$$\frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \frac{v}{h} = \frac{\kappa(h) \cdot h}{h} = \kappa(h) = k + \alpha(h).$$

[14]Die grauen Kurven sind einige Beispiele für unterschiedliche Basen.

[15]Die Definition lautet: Eine Funktion f heißt differenzierbar genau dann, wenn sie jede infinitesimale Differenz h in eine dazu proportionale Differenz $v = \kappa(h) \cdot h$ mit $\kappa(h) = k + \alpha(h)$ und k reell konstant der zugehörigen Funktionswerte abbildet.

Die Ableitung bei 0 ist der reelle Teil davon, also eine Konstante k — für jede Basis a natürlich unterschiedlich.
An dieser Stelle schreibt EULER in seiner ***Einleitung in die Analysis des Unendlichen***:
'Da man bei der Verfertigung eines Logarithmensystems die Basis a nach Belieben wählen kann, so kann man sie auch so annehmen, dass $k = 1$ wird. Setzen wir also $k = 1$, so ... erhält man für a folgenden Wert:

$$a = 2,71828182845904523536028,$$

wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. ...'
'Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl stets den Buchstaben e gebrauchen.'
Seit dieser Zeit wird an seiner Bezeichnung festgehalten und e die *Eulersche Zahl* genannt. Die Funktion $\exp : x \longmapsto e^x$ ist die Exponentialfunktion schlechthin – man kann jede Funktion zu einer anderen Basis a mit ihr berechnen.
Weil für e der konstante Faktor k eins ist, besitzt exp sich selbst als Ableitung.

$$\exp'(x) = 1 \cdot \exp(x) = \exp(x).$$

Der zugehörige Graph ist in der Abbildung hervorgehoben, seine Tangente in A hat den Anstieg 1.