Himmlische Analysis

Eine mathematische Theorie mit himmlischen Aussichten und Einsichten

Karl Kuhlemann

15. Mai 2026

1 Einleitung

1.1 Größer als alle angebbaren Zahlen?

Was bitteschön kann an einer mathematischen Theorie himmlisch sein? Lauschen wir dazu Emma und Paul, die sich darin messen, wer die größte Zahl kennt. Sie sind schon eine Weile dabei. Wir schalten uns in die Schlussphase ein.

Paul: Eine Dezilliarde.

Emma: Eine Dezilliarde mal eine Dezilliarde.

Paul: Eine Dezilliarde hoch eine Dezilliarde.

Emma: Himmelszahl.

Paul: Himmelszahl?

Emma: Ja. Ich behaupte, es gibt Zahlen, die größer sind als jede Zahl, die du angeben kannst. Ich nenne sie Himmelszahlen.

Paul: Dann nenn mir doch mal eine!

Emma: Das geht nicht. Himmelszahlen sind ja größer als alle Zahlen, die man angeben kann.

Paul: So etwas gibt es nicht.

Emma: Gibt es doch!

Hier blenden wir uns wieder aus und fragen uns, ob an Emmas Behauptung etwas dran sein könnte. Da Emma und Paul nur nicht-negative ganze Zahlen kennen, müssten auch Emmas Himmelszahlen solche sein. Ist das denkbar? Überraschenderweise ja!

Bevor wir das genauer ausführen, wollen wir uns überlegen, was man mit Himmelszahlen Sinnvolles anfangen könnte. Dazu machen wir einen Sprung in die 11. Klasse, wo man bereits reelle Zahlen kennt und Funktionen in den reellen Zahlen untersucht. Unter anderem fragt man dort nach der Steigung von Funktionsgraphen und dem Flächeninhalt von Flächen unterhalb von Funktionsgraphen. Das sind zwei typische Problemstellungen der sogenannten *Analysis*.

1.2 Eine Steigungsberechnung

Schauen wir uns ein konkretes Beispiel an. Die Normalparabel ist der Funktionsgraph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Die Frage beim Steigungsproblem lautet dann zum Beispiel: Welche Steigung hat der Funktionsgraph an der Stelle $x = 1$? Die Idee ist, die Steigung einer Geraden zu bestimmen, die den Funktionsgraphen an der Stelle 1 und einer zweiten Stelle $1 + h$, die nahe bei 1 liegt, schneidet (Abb. 1 links). Eine solche Gerade nennt man eine *Sekante*. Ihre Steigung ergibt sich als Quotient aus der Differenz der Funktionswerte und der Differenz der Argumente, also

$$\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2}{h} = \frac{2h + h}{h} = 2 + h. \tag{1}$$

Jetzt kommen unsere Himmelszahlen ins Spiel. Wenn eine Himmelszahl n größer als jede angebbare Zahl ist, dann ist sie insbesondere größer als $1, 2, 3, \ldots$, in einem intuitiven Sinne also unendlich groß. Wir sagen Emma zu liebe himmlisch groß. Wählen wir h als Kehrwert von n, dann ist h positiv, aber kleiner als $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, in einem intuitiven Sinne also unendlich klein. Wir sagen Emma zuliebe himmlisch klein. Wenn wir für h eine himmlisch kleine Zahl wählen, sollte sich die Sekantensteigung $2 + h$ nur noch um eine himmlisch kleine Zahl von der gesuchten Steigung unterscheiden. Wir erwarten daher, dass die Steigung des Funktionsgraphen an der Stelle 1 gleich 2 ist.

1.3 Eine Flächenberechnung

Beim Flächenproblem lautet die Frage zum Beispiel: Wie groß ist die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse von 0 bis 1? Die Idee hier ist, das Intervall von 0 bis 1 in kleine Abschnitte zu teilen und darüber jeweils Rechtecke zu errichten, die von der x-Achse bis zum Funktionsgraphen reichen (Abb. 1 rechts). Die Summe der Rechteckflächen sollte dann näherungsweise der Fläche unter dem Funktionsgraphen entsprechen, und zwar umso besser, je schmaler die Rechtecke sind.

Für eine beliebige natürliche Zahl n und n Rechtecke der Breite $h = \frac{1}{n}$ ergibt sich folgende Situation: Das k-te Rechteck liegt über dem Teilintervall von $(k-1)h$ bis kh und hat die Höhe $(kh)^2$. Damit reicht es mit seiner rechten oberen Ecke bis zum Funktionsgraphen. Seine Breite ist h. Sein Flächeninhalt ist Höhe mal Breite, also $(kh)^2 \cdot h = k^2h^3$.

Die Rechteckflächen müssen wir für $k = 1$ bis n summieren. Das ergibt für die Rechteckflächensumme

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k^2h^3 = h^3 \sum_{k=1}^{n} k^2. \tag{2}$$

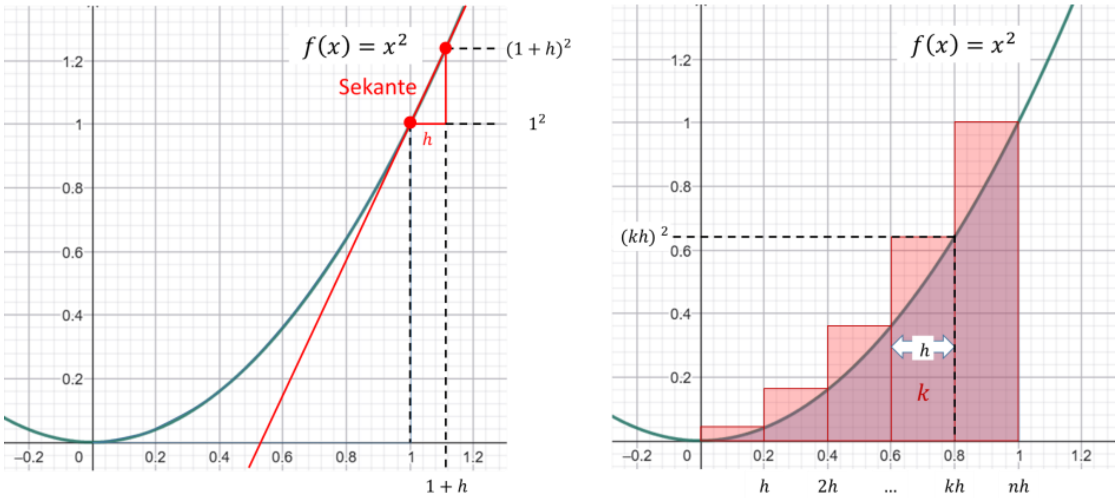

Abbildung 1: Steigungsberechnung (links) und Flächenberechnung (rechts) am Beispiel der Normalparabel.

Für die Summe kann man per vollständiger Induktion die folgende Formel beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3}$$

Setzen wir das in (2) ein und beachten $h = \frac{1}{n}$, rechnen wir wie folgt weiter:

$$R_n = h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = h^3 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h^2. \tag{4}$$

Wählen wir für die Anzahl der Abschnitte eine Himmelszahl n, dann ist die Breite der Rechtecke $h = \frac{1}{n}$ himmlisch klein, und die Summe der Rechteckflächen sollte sich nur noch um eine himmlisch kleine Zahl von der gesuchten Fläche unterscheiden. Da mit h auch $\frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h^2$ himmlisch klein ist, liegt die Summe der Rechteckflächen himmlisch nah bei $\frac{1}{3}$. Wir erwarten daher, dass die gesuchte Fläche gleich $\frac{1}{3}$ ist.

2 Wir erweitern die Theorie

Himmelszahlen können also dabei helfen, Probleme aus der Analysis zu lösen. Die Frage ist nun: Gibt es Himmelszahlen? Oder könnte es sie zumindest geben? Anders gefragt: Dürfen wir die bisherige mathematische Theorie einfach erweitern, indem wir den Begriff *Himmelszahl* hinzufügen und behaupten, jede angebbare Zahl sei zwar keine Himmelszahl, es gebe in der Menge $\mathbb{N}$ aber auch Himmelszahlen?

Die Antwort lautet: Im Prinzip ja, wenn wir darauf achten, dass wir uns keine Widersprüche einhandeln, das heißt, wenn die neuen Annahmen nicht im Widerspruch zu geltenden Aussagen der bisherigen Theorie stehen. Dann nämlich ist die Erweiterung der Theorie logisch möglich und damit mathematisch zulässig. Das ist sozusagen die Freiheit der theoretischen Mathematik.

Wenn du dich erinnerst, haben wir die Theorie bereits mehrfach im Zusammenhang mit Zahlbereichserweiterungen erweitert, und immer ohne in Widerspruch zur jeweiligen Bestandstheorie zu geraten. So hat etwa die Annahme, dass es reelle Zahlen gibt, nichts an der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen über rationale Zahlen geändert. Die Erweiterung zu den reellen Zahlen war also logisch möglich. Selbstverständlich gibt es neben der logischen Möglichkeit noch andere Kriterien, die bei Theorieerweiterungen in der Mathematik eine Rolle spielen, zum Beispiel die Nützlichkeit. Die Nützlichkeit der reellen Zahlen lag zum Beispiel darin, dass wir damit Gleichungen lösen konnten, die in den rationalen Zahlen unlösbar waren.

Da wir uns bereits von der Nützlichkeit der Himmelszahlen überzeugt haben, sind wir zuversichtlich und erweitern die Theorie ein weiteres Mal, und zwar zunächst sprachlich um den neuen Begriff *himmlisch*, um fortan zwischen himmlischen und nicht-himmlischen Dingen unterscheiden zu können. Erstere nennen wir auch *Himmelsdinge* und letztere *Standarddinge*. *Dinge* können hier alles sein, wovon unsere mathematische Theorie bisher handelt, zum Beispiel Zahlen, Mengen oder Funktionen. Im Moment haben wir noch keinen Anhaltspunkt, um zu entscheiden, welche Dinge unter welche Kategorie fallen. Zu den Standarddingen sollen jedenfalls alle Dinge gehören, die wir konkret angeben können. Das wird sich durch weitere Vereinbarungen ergeben.

2.1 Das Himmelszahlenaxiom

Als erstes wollen wir sicherstellen, dass es Himmelszahlen gibt. Daher formulieren wir Emmas Behauptung als neue grundlegende Annahme, das heißt, als Axiom. Wir nennen es das *Himmelszahlenaxiom*, kurz

Axiom H (Himmelszahlenaxiom)**.** *Es gibt Himmelszahlen in* $\mathbb{N}$.

Vorläufige Ergänzungen zum Axiom H:

1. 1 ist eine Standardzahl.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n eine Standardzahl ist, dann ist auch $n + 1$ eine Standardzahl.
3. In $\mathbb{N}$ sind alle Himmelszahlen größer als alle Standardzahlen.

Diese Ergänzungen werden wir später (in den Abschnitten 2.3 und 2.4) aus anderen Axiomen herleiten. Wir geben sie bereits an dieser Stelle an, um gleich zu Beginn eine bessere Vorstellung von den Himmelszahlen zu bekommen. Es spricht grundsätzlich nichts dagegen, sie zusammen mit Axiom **H** ebenfalls axiomatisch festzulegen.

Jetzt schauen wir uns an, was wir bezüglich der logischen Möglichkeit beachten müssen. Diesmal geht es nicht um eine Zahlbereichserweiterung, sondern um eine Erweiterung oder Verfeinerung der Betrachtung, denn wir entdecken die Himmelszahlen innerhalb der

Abbildung 2: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

bereits bekannten Menge $\mathbb{N}$, die wir eigentlich bereits vollständig zu kennen glaubten. Das stellt sich nun als Irrtum heraus, denn was sind eigentlich die natürlichen Zahlen? Natürlich $1, 2, 3$ und so weiter. Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen wird daher gerne einfach als $\{1, 2, 3, \ldots\}$ eingeführt, aber das ist keine richtige Definition, denn es ist überhaupt nicht klar, was im Laufe der Pünktchen alles noch kommen kann. Insbesondere sind hier keine Himmelszahlen ausgeschlossen.

Wie kann man die Menge $\mathbb{N}$ richtig definieren? Zum Beispiel so:

Definition 1. *$\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge, die 1 enthält und zu jedem ihrer Elemente n auch dessen Nachfolger $n + 1$.*[1]

Diese Aussage muss bei allen Theorieerweiterungen gültig bleiben, also auch, wenn wir die Existenz von Himmelszahlen annehmen. Wie würde die Menge $\mathbb{N}$ dann aussehen? Zu Beginn haben wir die Standardzahlen, zu denen die angebbaren Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ gehören. Unter den Standardzahlen gibt es keine letzte, denn wenn n eine Standardzahl ist, dann auch ihr Nachfolger $n+1$. Irgendwann kommen dann die Himmelszahlen. Unter ihnen gibt es keine erste, denn wenn n eine Himmelszahl ist, dann auch ihr Vorgänger $n-1$. Die dritte vorläufige Ergänzung zu Axiom **H** schließt aus, dass nach Himmelszahlen noch einmal Standardzahlen kommen. Natürlich gibt es auch keine letzte Himmelszahl, denn wenn n eine Himmelszahl ist, dann auch ihr Nachfolger $n + 1$. In Abbildung 2 stellen wir zur Veranschaulichung die Standardzahlen in Blau und die Himmelszahlen in Rot dar.

Wir müssen uns nun vorstellen, dass die Mengenlehre gewissermaßen farbenblind auf diese Menge schaut. Sie nimmt die Unterscheidung zwischen Standardzahlen und Himmelszahlen nicht wahr. Daher ist die Bildung einer Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nur die Standardzahlen enthält, nicht möglich. $\mathbb{N}$ ist und bleibt die kleinste Menge, die 1 und mit jeder Zahl deren Nachfolger enthält.

1. Hier setzen wir stillschweigend voraus, dass bereits definiert ist, was 1 ist und was zu einem gegebenen n der Nachfolger $n + 1$ ist, ferner, dass es überhaupt eine Menge gibt, die 1 enthält und zu jedem ihrer Elemente auch dessen Nachfolger. Mit anderen Worten: Wir setzen stillschweigend etwas Mengenlehre voraus, ohne die Axiome hierfür explizit angegeben zu haben.

Ist das ein Widerspruch zur bisherigen Theorie? Nein, denn in der bisherigen Theorie gab es den Begriff *Himmelszahl* nicht. Daher standen auch dort die Begriffe *Standardzahl* und *Himmelszahl* zur Teilmengenbildung nicht zur Verfügung. Alle Teilmengen von $\mathbb{N}$, die in der bisherigen Theorie gebildet werden konnten, können auch in der erweiterten Theorie gebildet werden. Und alle Aussagen über natürliche Zahlen, die bisher galten, gelten auch weiterhin. Es gibt keinen Widerspruch zur bisherigen Theorie.

2.2 Aussageformen

Bevor wir zum nächsten Axiom kommen, erinnern wir an den Begriff der *Aussageform*. Eine Aussageform unterscheidet sich von einer Aussage dadurch, dass sie sogenannte *freie Variablen* enthält, also Symbole, die keinen festen Wert haben, sondern Platzhalter für Zahlen (oder andere Dinge) sind. Beispiel: $x + 3 = 5$ ist eine Aussageform mit der freien Variablen x. Manchmal soll der Variabilitätsbereich einer Variablen auf Standarddinge eingeschränkt sein. Dann sprechen wir von einem *Standardparameter*.

Eine Aussageform wird zu einer wahren oder falschen Aussage, wenn man für die Variablen konkrete Werte einsetzt. In diesem Beispiel wird sie wahr, wenn wir für x die Zahl 2 einsetzen und ansonsten falsch.

Eine andere Möglichkeit, aus einer Aussageform eine Aussage zu machen, besteht darin, sie in eine *Allaussage* oder eine *Existenzaussage* einzubetten, also

- für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $x + 3 = 5$,

was offensichtlich falsch ist, bzw.

- es gibt $x \in \mathbb{N}$, sodass $x + 3 = 5$ gilt,

was zweifellos wahr ist. In solchen Aussagen nennt man x eine *gebundene Variable*.

Wir nennen eine Aussage oder Aussageform *konventionell*, wenn sie die neuen Begriffe *standard* oder *himmlisch* oder davon abgeleitete Begriffe nicht verwendet. Eine konventionelle Aussage bzw. Aussageform darf aber alle Begriffe und Symbole der bisherigen Theorie enthalten. Alle in diesem Abschnitt gezeigten Beispiele sind konventionell. Da wir die bisherige Theorie nur erweitern, aber nicht in ihrem Bestand verändern, gelten alle Sätze der bisherigen Theorie weiter.

Exkurs: Vollständige Induktion

Aussagen über natürliche Zahlen werden oft per *vollständiger Induktion* bewiesen. Man zeigt dazu, dass eine konventionelle Aussageform $A(n)$ für $n = 1$ gilt (das ist der Induktionsanfang) und dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $A(n)$, dann $A(n + 1)$ (das ist der Induktionsschritt). Dann weiß man, dass die Erfüllungsmenge $E := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$ die Zahl 1 enthält und mit jedem n auch $n+1$. Da $\mathbb{N}$ definitionsgemäß die kleinste solche Menge ist, muss $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von E sein, also $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

All dies bleibt auch in der erweiterten Theorie gültig. Insbesondere widerspricht Axiom **H** (inklusive der vorläufigen Ergänzungen) nicht dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion, denn dieses gilt nur für konventionelle Aussageformen, aber nicht für die Eigenschaft, eine Standardzahl zu sein.

2.3 Das Transferaxiom

Damit unsere Theorieerweiterung logisch konsistent bleibt, ist es wichtig, dass sich die Himmelsdinge in Bezug auf die konventionelle Mathematik nicht von den Standarddingen unterscheiden. Dies formulieren wir wieder als Axiom. Wir nennen es das *Transferaxiom* oder kurz Axiom **T**.

In diesem gesamten Abschnitt sei $A(x)$ eine beliebige konventionelle Aussageform mit der freien Variablen x und ansonsten höchstens noch Standardparametern.

Axiom T (Transferaxiom). *Wenn $A(x)$ für alle standard x gilt, dann gilt $A(x)$ für alle x (also auch für die himmlischen).*

Vereinfacht gesagt: Was konventionell für alle Standarddinge gilt, das gilt generell. Kein Wunder also, dass die Himmelsdinge bisher noch niemandem aufgefallen sind. Äquivalent zum Transferaxiom ist der folgende

Satz 1 (Variante des Transferaxioms). *Wenn $A(x)$ für (mindestens) ein x gilt, dann gilt $A(x)$ für (mindestens) ein standard x.*

Beweis. Mit $A(x)$ ist auch die Negation „nicht $A(x)$“ eine konventionelle Aussageform. Wenden wir das Transferaxiom auf „nicht $A(x)$“ an, erhalten wir:

- Wenn „nicht $A(x)$“ für alle standard x gilt, dann gilt „nicht $A(x)$“ für alle x

Nach der logischen Schlussregel *modus ponens* dürfen wir die Richtung einer Wenn-dann-Aussage umkehren, wenn wir beide Teilaussagen verneinen (das heißt, „wenn P, dann Q“ ist äquivalent zu „wenn nicht Q, dann nicht P“). Wir erhalten so:

- Wenn „nicht $A(x)$“ *nicht* für alle x gilt, dann gilt „nicht $A(x)$“ *nicht* für alle standard x.

Der Wenn-Teil bedeutet: $A(x)$ gilt für (mindestens) ein x. Der Dann-Teil bedeutet: $A(x)$ gilt für (mindestens) ein standard x. Die gesamte Wenn-dann-Aussage ist also gerade die Behauptung von Satz 1 $\square$

Aus der Variante des Transferaxioms folgt insbesondere

Korollar 1. *Wenn $A(x)$ für genau ein x gilt, so muss dieses durch $A(x)$ eindeutig bestimmte Ding standard sein.*

Das heißt: Jedes konventionell (evtl. mit Standardparametern) definierte Ding ist standard. Das ist eine wichtige Erkenntnis, denn daraus ergibt sich, dass alles, womit wir es konkret in der Mathematik zu tun bekommen, standard ist. Insbesondere folgen aus dem Korollar die vorläufigen Ergänzungen 1 und 2 zum Axiom **H** aus Abschnitt 2.1.

Beispiele für Standarddinge

1. Jede ganze Zahl, die als Zeichenkette aus Dezimalziffern angegeben wird, ist standard, zum Beispiel 1729.

2. Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ standard sind und $b \neq 0$, dann ist $\frac{a}{b}$ standard. Hier sind a und b Standardparameter.

3. Jede angebbare reelle Zahl ist standard, denn jede angebbare reelle Zahl wird eindeutig durch eine konventionelle Aussageform definiert. $\sqrt{2}$ ist zum Beispiel durch „$x > 0$ und $x^2 = 2$" eindeutig bestimmt.

4. Jede konventionell definierte Menge ist standard. Beispiele: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind standard, denn diese Mengen wurden in der bisherigen Theorie, das heißt konventionell definiert. Für $\mathbb{N}$ haben wir das zugegebenermaßen erst eben nachgeholt.

5. Wenn M eine Standardmenge ist, dann ist auch $\{x \in M \mid A(x)\}$ eine Standardmenge. Hier ist M ein Standardparameter.

6. Jede konventionell definierte Funktion ist standard, zum Beispiel

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

Achtung: Standardmengen können Himmelsdinge enthalten, so wie $\mathbb{N}$ Himmelszahlen enthält.

Funktionen

Schauen wir noch etwas genauer auf das Thema Funktionen. Eine Funktion $f\colon D \to Z$ ordnet jedem Element ihrer Definitionsmenge D eindeutig ein Element ihrer Zielmenge Z zu. Zu einer gegebenen Funktion stehen also Definitionsmenge, Zielmenge und zu jedem Argument der Funktionswert fest. Daher folgt: Wenn $f\colon D \to Z$ eine Standardfunktion ist, dann sind D und Z Standardmengen und für alle standard $x \in D$ ist auch $f(x)$ standard. Kurz gesagt: Standardfunktionen ordnen Standardargumenten Standardfunktionswerte zu.

Himmelsdinge

Woher wissen wir überhaupt, dass es Himmelsmengen und Himmelsfunktionen gibt, wenn alle Mengen und Funktionen, die wir konkret angeben können, standard sind? Es ist eine Konsequenz der Axiome **T** und **H**.

Aus der bisherigen Theorie wissen wir, dass es für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{1, \ldots, n\} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ gibt. Sie ist der Prototyp einer *endlichen* Menge. Gemäß Axiom **H** kann n auch eine Himmelszahl sein. In diesem Fall kann $\{1, \ldots, n\}$ keine Standardmenge sein, denn sonst wäre ihr eindeutig bestimmtes Maximum n gemäß Axiom **T** (genauer, nach dem Korollar zu Satz 1) ebenfalls standard. Also ist $\{1, \ldots, n\}$ eine Himmelsmenge, wenn n eine Himmelszahl ist. Dass diese Menge trotzdem endlich ist (weil alle Sätze und Begriffe aus der bisherigen Theorie gültig bleiben), ist eine der erstaunlichen Konsequenzen der Himmlischen Analysis.

So, wie wir bei den natürlichen Zahlen zwischen Standardzahlen und Himmelszahlen unterscheiden, so können wir auch bei den endlichen Mengen zwischen *standard-endlichen* und *himmels-endlichen* (kurz: *h-endlichen*) Mengen unterscheiden. Wichtig dabei ist: An konventionell gültigen Aussagen über endliche Mengen ändert sich dadurch nichts. Sie gelten weiterhin für *alle* endlichen Mengen.

Da die Definitionsmenge einer Standardfunktion eine Standardmenge ist, muss jede Funktion, deren Definitionsmenge eine Himmelsmenge ist, eine Himmelsfunktion sein, zum Beispiel die Funktion

$$\{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2,$$

wenn n eine Himmelszahl ist. Auch die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto nx$$

ist dann eine Himmelsfunktion, denn sie ordnet der Standardzahl 1 die Himmelszahl n zu. Überlege dir weitere Beispiele für Himmelsmengen und -funktionen.

Transfer von Aussageformen mit mehreren Variablen

Bei konventionellen Aussageformen mit mehreren freien Variablen kann man das Transferaxiom mehrmals hintereinander anwenden.

Beispiel: Nehmen wir an, wir haben eine konventionelle Aussageform $A(x_1, x_2)$ für alle standard x_1, x_2 bewiesen. Dann wenden wir Axiom $\mathbf{T}$ zunächst bezogen auf x_1 (und mit x_2 als Standardparameter) an und erhalten: $A(x_1, x_2)$ für *alle* x_1.

Da diese Aussageform für alle *standard* x_2 gilt, können wir Axiom $\mathbf{T}$ erneut, diesmal bezogen auf x_2, anwenden und schließen, dass sie für *alle* x_2 gilt. Zusammenfassend erhalten wir also:

$$\text{Wenn } A(x_1, x_2) \text{ für alle standard } x_1, x_2 \text{ gilt, dann gilt} A(x_1, x_2) \text{ für alle } x_1, x_2. \tag{5}$$

Entsprechend können wir auch die Variante des Transferaxioms für Aussageformen mit mehreren Variablen formulieren:

$$\begin{aligned} &\text{Wenn es } x_1, x_2 \text{ gibt, für die } A(x_1, x_2) \text{ gilt, dann gibt es standard } x_1, x_2, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für die } A(x_1, x_2) \text{ gilt.} \end{aligned} \tag{6}$$

(5) und (6) gelten in analoger Weise für Aussageformen mit drei und mehr freien Variablen (und optional noch Standardparametern).

2.4 Das Standardfunktionsaxiom

Aus dem Transferaxiom folgt: Eine Standardfunktion $f\colon D \to Z$ ist durch ihre Funktionswerte der standard $x \in D$ eindeutig bestimmt, denn wenn zwei Standardfunktionen für alle Standardargumente übereinstimmen, dann stimmen sie nach dem Transferaxiom überall überein.

Es liegt daher nahe zu fragen, ob wir umgekehrt zu zwei Standardmengen D und Z eine Standardfunktion $f\colon D \to Z$ eindeutig definieren können, indem wir allein angeben, welches ihre Funktionswerte der *standard* $x \in D$ sein sollen. Das klingt zumindest sehr plausibel. Wir fordern es als drittes und letztes Axiom unserer Theorieerweiterung. Wir nennen es das *Standardfunktionsaxiom* oder kurz Axiom **S**. Genauer lautet es so:

Axiom S (Standardfunktionsaxiom)**.** *D und Z seien zwei Standardmengen und $A(x, y)$ eine Aussageform, die für jedes standard $x \in D$ eindeutig ein standard $y \in Z$ bestimmt. Dann gibt es eine Standardfunktion $f\colon D \to Z$, die die durch $A(x, y)$ gegebene Zuordnung fortsetzt, das heißt dergestalt, dass für alle standard $x \in D$ gilt:*

$$f(x) = y \textit{ genau dann, wenn } A(x, y).$$

Die Aussageform $A(x, y)$ unterliegt hier keinerlei Einschränkungen, muss also nicht unbedingt konventionell sein und darf beliebige Parameter enthalten. Wichtig ist nur, dass sie zu jedem standard $x \in D$ eindeutig ein standard $y \in Z$ bestimmt. Die Standardfunktion f aus Axiom **S** ist eindeutig bestimmt, da eine Standardfunktion bereits durch die Funktionswerte für Standardargumente eindeutig bestimmt ist, und diese sind durch die Aussageform $A(x, y)$ vorgegeben.

Unsere Theorieerweiterung ist mit der Unterscheidung von Standarddingen und Himmelsdingen sowie den Axiomen **H**, **T** und **S** komplett. Was uns noch fehlt, ist der Nachweis, dass auch die dritte vorläufige Ergänzung aus Abschnitt 2.1 (dass in $\mathbb{N}$ alle Himmelszahlen größer als alle Standardzahlen sind) aus diesen Axiomen folgt. Das holen wir mit folgendem Satz nach. Wenn die Ergänzungen axiomatisch gefordert wurden, kann der Beweis von Satz 2 übersprungen werden.

Satz 2. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n standard ist und $m < n$, dann ist auch m standard.*

Beweis. Für $m = 1$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, n standard und $1 < m < n$. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definiert durch $f(k) = 1$, wenn $k < m$ und 0 sonst. Nach Axiom **S** gibt es eine Standardfunktion $g\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, sodass für alle standard $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f(k) = g(k)$, also (gemäß Definition von f)

$$g(k) = 1 \text{ genau dann, wenn } k < m. \tag{7}$$

Für alle standard $k \geq m$, und damit erst recht für alle standard $k \geq n$, ist daher $g(k) = 0$. Also gilt für alle standard $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{wenn } k \geq n, \text{ dann } g(k) = 0. \tag{8}$$

Das ist eine konventionelle Aussageform mit Variable k und Standardparametern n und g. Nach dem Transferaxiom gilt (8) daher für *alle* $k \in \mathbb{N}$. Das wiederum bedeutet, dass die (konventionell mit Standardparametern gebildete) Standardmenge $\{k \in \mathbb{N} \mid g(k) = 1\}$ nach oben durch n beschränkt ist und daher eine größte Zahl k_0 enthält. Diese ist eindeutig bestimmt und daher standard, ebenso wie $k_0 + 1$. Nach Definition von k_0 ist $g(k_0) = 1$ und $g(k_0 + 1) = 0$, nach (7) also $k_0 < m$, aber nicht $k_0 + 1 < m$, folglich $k_0 + 1 = m$. Also ist m standard. □

2.5 Zahltypen: h-groß, h-klein, beschränkt

Wir rekapitulieren die Definition der Zahltypen, die wir zum Teil bereits in unseren Beispielen zur Steigungs- und Flächenberechnung benutzt haben:

Definition 2. *Eine reelle Zahl heißt*

- himmlisch groß *(kurz:* h-groß*), wenn ihr Betrag größer als jede Standardzahl ist,*
- standard-beschränkt *(kurz:* beschränkt*), wenn sie nicht h-groß ist, wenn ihr Betrag also kleiner-gleich einer Standardzahl ist.*
- himmlisch klein *(kurz:* h-klein*), wenn ihr Betrag kleiner als jede positive Standardzahl ist.*

Wir sagen, zwei reelle Zahlen a und b liegen himmlisch nah *beieinander, wenn ihre Differenz h-klein ist. Wir schreiben dann $a \simeq b$. Für positive h-große Zahlen x schreiben wir $x \gg 1$.*

Für das Rechnen mit den unterschiedlichen Zahltypen gelten plausible Rechenregeln. Der folgende Satz fasst die wichtigsten zusammen.

Satz 3. *Es seien x und y reelle Zahlen.*

1. *Wenn x und y h-klein sind, dann ist $x + y$ h-klein.*
2. *Wenn $x \gg 1$ und $y \gg 1$, dann $x + y \gg 1$.*
3. *Wenn x und y beschränkt sind, dann sind $x + y$ und $x \cdot y$ beschränkt.*
4. *Wenn x h-groß ist, dann ist $\frac{1}{x}$ h-klein.*
5. *Wenn x nicht h-klein ist, dann ist $\frac{1}{x}$ beschränkt.*
6. *Wenn x beschränkt und y h-klein ist, dann ist $x \cdot y$ h-klein.*

Beweis. Zu 1. Seien x und y h-klein und s eine beliebige positive Standardzahl. Dann sind $|x|$ und $|y|$ kleiner als $\frac{s}{2}$ und daher

$$|x + y| \leq |x| + |y| < \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s.$$

Also ist $|x + y|$ kleiner als jede beliebige positive Standardzahl und damit $x + y$ h-klein.

Zu 2. Seien $x \gg 1$ und $y \gg 1$ und s eine beliebige Standardzahl. Dann sind $x > s$ und $y > s$ und damit $x + y > s$. Also ist $x + y$ größer als jede beliebige Standardzahl und damit $x + y \gg 1$.

Zu 3. Seien x und y beschränkt. Dann gibt es Standardzahlen s_1 und s_2 mit $|x| \leq s_1$ und $|y| \leq s_2$. Damit ist auch $s_1 + s_2$ standard und

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq s_1 + s_2.$$

Also ist $x + y$ beschränkt. Ebenso ist $s_1 \cdot s_2$ standard und

$$|xy| = |x| \cdot |y| \leq s_1 \cdot s_2.$$

Also ist xy beschränkt.

Zu 4. Sei x h-groß und s eine beliebige positive Standardzahl. Dann ist $\frac{1}{s}$ ebenfalls positiv und standard und $|x| > \frac{1}{s}$, folglich

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < s.$$

Also ist $\left|\frac{1}{x}\right|$ kleiner als jede positive Standardzahl und damit $\frac{1}{x}$ h-klein.

Zu 5. Sei x nicht h-klein. Dann gibt es eine positive Standardzahl s mit $|x| \geq s$ und damit

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{s}.$$

Da $\frac{1}{s}$ standard ist, ist $\frac{1}{x}$ beschränkt.

Zu 6. Sei x beschränkt, y h-klein und s eine beliebige positive Standardzahl. Da x beschränkt ist, gibt es eine positive Standardzahl s_0 mit $|x| \leq s_0$. Da y h-klein ist, ist $|y|$ kleiner als die positive Standardzahl $\frac{s}{s_0}$ und

$$|xy| = |x| \cdot |y| < s_0 \cdot \frac{s}{s_0} = s.$$

Also ist $|xy|$ kleiner als jede beliebige positive Standardzahl und damit xy h-klein. $\square$

Übung: Überlege dir weitere Rechenregeln und beweise sie.

Die reelle Zahlengerade sieht jetzt so aus, wie in Abbildung 3 dargestellt. Wir haben im mittleren Bereich die beschränkten Zahlen, zu denen insbesondere alle Standardzahlen gehören, aber auch Himmelszahlen, die himmlisch nah bei den Standardzahlen liegen. Wir haben diesen Teil daher violett eingefärbt, als Mischung von Blau und Rot. In den Außenbezirken liegen die h-großen Zahlen, links die negativen, rechts die positiven. Sie gehören zu den Himmelszahlen.

Satz 4. *Null ist die einzige h-kleine Standardzahl.*

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}$ standard und h-klein. Dann gilt für alle standard x

$$\text{wenn } x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0, \text{ dann } |s| < x. \tag{9}$$

(9) ist eine Aussageform mit Variable x und Standardparameter s. Nach dem Transferaxiom gilt (9) dann für alle x. Also muss $s = 0$ sein. $\square$

Abbildung 3: Die reelle Zahlengerade.

2.6 Dezimalbrüche

Aus der konventionellen Theorie der reellen Zahlen wissen wir:

- Jeder unendliche Dezimalbruch bestimmt eine reelle Zahl (seinen Grenzwert).
- Umgekehrt hat jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung, das heißt, sie ist Grenzwert eines unendlichen Dezimalbruchs.
- Zu jeder reellen Zahl x gibt es genau eine ganze Zahl m, für die gilt:

$$m \leq x < m + 1.$$

  Die Zahl m wird auch mit $[x]$ („Gauß-Klammer von x“) bezeichnet.

Diese Aussagen gelten also auch in der erweiterten Theorie. Wir betrachten nun der Einfachheit halber nur positive reelle Zahlen. Für negative gelten die Aussagen spiegelbildlich analog.

Satz 5. *Für jede positive reelle Zahl x gilt: x ist beschränkt genau dann, wenn $[x]$ standard ist.*

Beweis. Wenn x positiv und beschränkt ist, dann ist $0 < x \leq s$ für eine Standardzahl s. Dann ist $[s] + 1 \in \mathbb{N}$ standard und $[x] \leq x \leq s < [s] + 1$. Entweder ist $[x] = 0$ und daher standard oder es ist $[x] \in \mathbb{N}$ und daher nach Satz 2 standard. Ist umgekehrt $[x]$ standard, dann ist auch $[x] + 1$ standard und x wegen $0 < x \leq [x] + 1$ beschränkt. □

Für natürliche Zahlen n gilt $n = [n]$, und wir erhalten folgendes

Korollar 2. *In $\mathbb{N}$ gilt:*

- *Die beschränkten Zahlen sind genau die Standardzahlen.*
- *Die h-großen Zahlen sind genau die Himmelszahlen.*

Dezimalziffernfolge: $\mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}, k \mapsto z_k$

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
z_1	z_2	z_3	$\cdots$	$\cdots$	z_{n-1}	z_n	z_{n+1}	$\cdots$

Dezimalziffernfolge für positive h-kleine Zahlen

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
0	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0	z_n $\neq 0$	z_{n+1}	$\cdots$

Abbildung 4: Dezimalziffernfolge einer reellen Zahl aus [0,1[.

Jede positive reelle Zahl x zerfällt eindeutig in ihren ganzzahligen Anteil $[x] \in \mathbb{N}_0$ und einen Rest $r \in [0, 1[$. Der ganzzahlige Teil $[x]$ entscheidet gemäß Satz 5 darüber, ob x beschränkt ist oder nicht. Jetzt schauen wir uns den Rest r genauer an.

Jede reelle Zahl $r \in [0, 1[$ hat eine Dezimalbruchentwicklung der Form $0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ mit einer im Allgemeinen unendlichen Folge von Dezimalziffern. Die Pünktchen am Ende täuschen darüber hinweg, dass ein unendlicher Dezimalbruch genau genommen ein recht abstraktes Objekt ist. Man versteht darunter eine unendliche Folge von Teilsummen

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} \right)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{mit } z_k \in \{0, \ldots, 9\}.$$

Die Summenschreibweise haben wir bereits im Zusammenhang mit der Flächenberechnung verwendet. In der n-ten Teilsumme läuft der Index k von 1 bis n, und die Ziffern z_k gehen mit ihrem Stellenwert, also geteilt durch 10^k, als Summand in die Summe ein. Ein unendlicher Dezimalbruch ist also die unendliche Folge seiner Teilsummen. Da die Teilsummen rationale Zahlen sind, ist ein unendlicher Dezimalbruch damit eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$.

Statt der Teilsummenfolge, kann man auch die Folge der Dezimalziffern selbst betrachten. Diese ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ in die Menge $\{0, \ldots, 9\}$ der Dezimalziffern und ordnet jeder natürlichen Zahl k die Ziffer z_k, die an der k-ten Stelle des Dezimalbruchs steht, zu. Erst kommen die Ziffern an den Standardstellen, irgendwann dann die Ziffern an den himmlischen Stellen (Abb. 4 oben).

Mit dieser Darstellung können wir nun gut sichtbar machen, wodurch sich die Dezimalziffernfolge einer positiven h-kleinen Zahl auszeichnet (Abb. 4 unten). Die Dezimalziffern an allen Standardstellen sind 0, und das setzt sich an den himmlischen Stellen zunächst fort. Aber an irgendeiner himmlischen Stelle n kommt eine Ziffer ungleich 0. Ab da kann es dann beliebig weitergehen. Die Dezimalbruchentwicklung einer h-kleinen Zahl stimmt also an allen Standardstellen mit der von 0 überein.

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen den Dezimalbruchentwicklungen einer beliebigen beschränkten reellen Zahl einerseits und einer himmlisch nahen Standardzahl andererseits. Dies nutzen wir im folgenden Abschnitt, um die Existenz des *Standardteils* zu beweisen.

2.7 Standardteil

Eine wichtige Anwendung von Axiom **S** ist der folgende

Satz 6. *Zu jeder beschränkten reellen Zahl b gibt es genau eine reelle Standardzahl s, die himmlisch nah bei b liegt.*

Wir können uns vorstellen, dass die beiden Zahlen unter einer Himmelslupe sichtbar werden, die himmlisch kleine Unterschiede auflösen kann. Die Zahl s heißt der *Standardteil* von b und wird mit $\mathrm{st}(b)$ bezeichnet.

Beweis. Zur Eindeutigkeit: Sei b beschränkt und seien s, s' standard und $s \simeq b \simeq s'$. Dann ist

$$s - s' = (s - b) - (s' - b) \simeq 0.$$

Da $s - s'$ standard ist und 0 die einzige h-kleine Standardzahl ist, folgt $s = s'$.

Zur Existenz: Wir betrachten zunächst den Fall $b \in [0, 1[$. Sei $f : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ eine Dezimalziffernfolge zu b und $g : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ die (nach Axiom **S** existierende) Standarddezimalziffernfolge, die an allen Standardstellen mit f übereinstimmt. Die Standarddezimalziffernfolge g bestimmt eindeutig eine Teilsummenfolge und damit eine reelle Standardzahl s. Für alle standard $k \in \mathbb{N}$ stimmen die Dezimalbruchentwicklungen von b und s bis zur Stelle k überein, und daher ist

$$|b - s| < \frac{1}{10^k}.$$

Für jede positive Standardzahl ε gibt es ein standard $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{10^k} < \varepsilon$. Also ist $|b - s|$ kleiner als jede positive Standardzahl und damit h-klein. Das heißt: $b \simeq s$.

Jetzt sei b eine beliebige positive beschränkte reelle Zahl. Dann gibt es ein standard $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in [0, 1[$ mit $b = m + r$. Dann ist $m + \mathrm{st}(r)$ der Standardteil von b.

Für negative beschränkte Zahlen b ist $-\mathrm{st}(-b)$ der Standardteil von b. □

Satz 7. *Für alle beschränkten $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.
2. $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.
3. *Wenn y nicht h-klein ist, dann ist* $\mathrm{st}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\mathrm{st}(y)}$.

4. *Wenn y nicht h-klein ist, dann ist* $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$.

5. *Wenn* $y \geq 0$, *dann* $\mathrm{st}(y) \geq 0$.

6. *Wenn* $x \leq y$, *dann* $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gibt es $\tilde{x} \simeq 0$ und $\tilde{y} \simeq 0$ mit $x = \mathrm{st}(x) + \tilde{x}$ und $y = \mathrm{st}(y) + \tilde{y}$. Nach Satz 3 sind $x + y$ und $x \cdot y$ beschränkt und, sofern y nicht h-klein ist, ist auch $\frac{1}{y}$ beschränkt. Daher existieren die jeweiligen Standardteile.

Zu 1.

$$x + y = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y) + \tilde{x} + \tilde{y} \simeq \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y).$$

Da $\mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$ standard ist, folgt die Behauptung.

Zu 2.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\mathrm{st}(x) + \tilde{x})(\mathrm{st}(y) + \tilde{y}) \\ &= \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y) + \mathrm{st}(x)\,\tilde{y} + \tilde{x}\,\mathrm{st}(y) + \tilde{x}\tilde{y} \\ &\simeq \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y). \end{aligned}$$

Da $\mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y)$ standard ist, folgt die Behauptung.

Zu 3. Sei y nicht h-klein. Dann ist $\mathrm{st}(y) \neq 0$ und

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\mathrm{st}(y)} \cdot \frac{\mathrm{st}(y)}{y} = \frac{1}{\mathrm{st}(y)} \cdot \frac{y - \tilde{y}}{y} = \frac{1}{\mathrm{st}(y)} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{y}}{y}\right). \tag{10}$$

Da $\frac{1}{y}$ beschränkt ist und $\tilde{y} \simeq 0$, folgt $\frac{\tilde{y}}{y} \simeq 0$ und damit $\left(1 - \frac{\tilde{y}}{y}\right) \simeq 1$. Geht man in (10) zum Standardteil über, folgt die Behauptung.

Zu 4. Die Behauptung folgt aus 2. und 3.

Zu 5. Wir zeigen: wenn $\mathrm{st}(y) < 0$, dann $y < 0$. Das ist äquivalent zur Behauptung. Sei also $\mathrm{st}(y) < 0$. Dann ist $-\mathrm{st}(y)$ positiv und standard. Wegen $\tilde{y} \simeq 0$ folgt $|\tilde{y}| < -\mathrm{st}(y)$, also $\mathrm{st}(y) + |\tilde{y}| < 0$. Damit erhalten wir

$$y = \mathrm{st}(y) + \tilde{y} \leq \mathrm{st}(y) + |\tilde{y}| < 0.$$

Zu 6. Sei $x \leq y$. Dann ist $y - x \geq 0$ und nach den zuvor bewiesenen Regeln 1, 2 und 5

$$\mathrm{st}(y) - \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y - x) \geq 0.$$

Also ist $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$. □

In den folgenden Abschnitten erfährst du, wie man das Steigungsproblem und das Flächenproblem mit Himmelszahlen in allgemeiner Weise angehen kann. Dabei wird die Steigung des Funktionsgraphen gleich dem Standardteil einer Sekantensteigung sein, bei der die Sekante durch zwei himmlisch nah beieinander liegenden Punkte bestimmt ist. Und die Fläche unter dem Funktionsgraphen wird der Standardteil einer Rechteckflächensumme mit Rechtecken himmlisch kleiner Breite sein.

3 Differentialrechnung

In diesem Abschnitt sei D stets eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

3.1 Die Ableitung einer Standardfunktion

Definition 3. *Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Standardfunktion und $x_0 \in D$ standard. Eine Standardzahl $c \in \mathbb{R}$ heißt* Ableitung *von f an der Stelle x_0, wenn*

1. *es ein $h \simeq 0$, $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in D$ gibt und*
2. *für alle solchen h gilt:*
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \simeq c. \tag{11}$$

Wenn es eine Ableitung von f an der Stelle x_0 gibt, dann heißt f dort differenzierbar.

Da zwei Standardzahlen mit h-kleinem Abstand gleich sein müssen, folgt aus (11), dass eine Ableitung, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt und gleich dem Standardteil des Quotienten in (11) ist, also

$$c = \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right).$$

Ableitungsfunktion

Eine Standardfunktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn sie an jeder Standardstelle ihres Definitionsbereichs eine Standardzahl als Ableitung gemäß Definition 3 hat.

Nach Axiom **S** gibt es dann eine eindeutig bestimmte Standardfunktion $f': D \to \mathbb{R}$, die jeder Standardstelle aus D die Ableitung gemäß Definition 3 zuordnet. Die Funktion f' heißt die *Ableitungsfunktion* (oder kurz die *Ableitung*) von f.

Auf diese Weise haben wir den Ableitungsbegriff auf ganz D ausgedehnt. Wenn die Standardfunktion $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, nennen wir also $f'(x)$ für alle $x \in D$ die *Ableitung von f an der Stelle x*. Beachte, dass die Ableitung an den himmlischen Stellen eine Himmelszahl sein kann.

Beispiel. Wir können jetzt unser Eingangsbeispiel aus Abschnitt 1.2 etwas verallgemeinern. Für die Standardfunktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

und eine Standardstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Für jedes standard x_0 ist auch $2x_0$ standard. Also ist die Standardfunktion

$$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mapsto x \mapsto 2x$$

die Ableitung von f. Die Ableitung $f'(x)$ definiert die Steigung des Funktionsgraphen an der Stelle x.

Differentiale

Für das Beweisen von *Ableitungsregeln*, also von Regeln zum Rechnen mit Ableitungen, ist es praktisch, auf die von Leibniz eingeführte Differentialschreibweise zurückzugreifen. Für eine h-kleine Zahl, die die Veränderung des Arguments x einer Funktion f bezeichnen soll, schreiben wir dann zum Beispiel dx und für die zugehörige Veränderung des Funktionswerts entsprechend df. Das heißt, wir definieren $df := f(x + dx) - f(x)$.

Für eine differenzierbare Standardfunktion f und eine Standardstelle x gilt dann nach Definition 3 $f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{df}{dx}\right)$. Da $\frac{df}{dx}$ in diesem Fall beschränkt ist und $dx \simeq 0$, gilt insbesondere $df = \frac{df}{dx} \cdot dx \simeq 0$. Die h-kleinen Zahlen dx und df heißen in diesem Zusammenhang *Differentiale* und $\frac{df}{dx}$ der *Differentialquotient*. Die Ableitung einer differenzierbaren Standardfunktion an einer Standardstelle ist also der Standardteil des Differentialquotienten.

3.2 Ableitungsregeln

Wir beginnen mit zwei einfachen Grundfunktionen.

Konstante Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\mathrm{const}_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$. Wenn c standard ist, dann ist auch const_c standard, und mit Definition 3 ergibt sich sofort die Ableitung 0 an allen Standardstellen. Daher ist

$$\mathrm{const}_c' = \mathrm{const}_0.$$

Identitätsfunktion. Wir definieren die Standardfunktion $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Mit Definition 3 ergibt sich sofort die Ableitung 1 an allen Standardstellen. Daher ist

$$\mathrm{id}' = \mathrm{const}_1.$$

Aus diesen Grundfunktionen kann man durch Verknüpfung sowie durch Anwenden der Grundrechenarten komplexere Funktionen zusammensetzen. Die folgenden Sätze zeigen, wie sich in diesen Fällen die Ableitungen verhalten. Es genügt jeweils, die Behauptungen für die standard $x \in D$ zu zeigen. Nach dem Transferaxiom gelten sie dann überall in D. In den Beweisen sei dx stets eine h-kleine Zahl ungleich 0, für die $x + dx$ im Definitionsbereich D der jeweils betrachteten Funktionen liegt.

Summen-, Faktor- und Produktregel

Satz 8. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Standardfunktionen und $c \in \mathbb{R}$ standard. Dann sind auch $f + g$, $c \cdot f$ und $f \cdot g$ standard und differenzierbar, und es gilt*

1. $(f + g)' = f' + g'$,
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Beweis. Zu 1. Für eine Standardstelle $x \in D$ rechnen wir

$$\begin{aligned} d(f+g) &= f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x) \\ &= f(x) + df + g(x) + dg - f(x) - g(x) \\ &= df + dg. \end{aligned}$$

Division durch dx ergibt

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

Die Differentialquotienten auf der rechten Seite sind beschränkt, da f, g differenzierbar sind. Geht man zu den Standardteilen über, ergibt sich

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Zu 2. Dies ist ein Spezialfall der nächsten Regel 3.
Zu 3. Für eine Standardstelle $x \in D$ rechnen wir

$$\begin{aligned} d(fg) &= f(x+dx)\, g(x+dx) - f(x)\, g(x) \\ &= (f(x) + df)\,(g(x) + dg) - f(x)\, g(x) \\ &= f(x)\, g(x) + f(x)\, dg + df\, g(x) + df\, dg - f(x)\, g(x) \\ &= f(x)\, dg + df\, g(x) + df\, dg. \end{aligned}$$

Division durch dx ergibt

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}\, dg.$$

Die Differentialquotienten auf der rechten Seite sind beschränkt, da f, g differenzierbar sind. $f(x)$ und $g(x)$ sind beschränkt, da f, g, x standard sind. Damit ist der gesamte Term auf der rechten Seite beschränkt. Der letzte Summand ist h-klein (wegen $dg \simeq 0$). Geht man zu den Standardteilen über, ergibt sich

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

$\square$

Quotientenregel

Satz 9. *Sei $g\colon D \to \mathbb{R}$ standard, differenzierbar und überall ungleich 0. Dann ist auch $\frac{1}{g}$ standard und differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Beweis. Für eine Standardstelle $x \in D$ rechnen wir

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{g}\right) &= \frac{1}{g(x+dx)} - \frac{1}{g(x)} \\
&= \frac{g(x) - g(x+dx)}{g(x+dx)g(x)} \\
&= \frac{g(x) - (g(x)+dg)}{(g(x)+dg)g(x)} \\
&= \frac{-dg}{g(x)^2 + g(x)\,dg}
\end{aligned}
$$

Division durch dx ergibt

$$
\frac{d\left(\frac{1}{g}\right)}{dx} = -\frac{dg}{dx} \cdot \frac{1}{g(x)^2 + g(x)\,dg}
$$

Da g differenzierbar ist, ist der Differentialquotient $\frac{dg}{dx}$ beschränkt. Da $g(x)$ standard ist und $dg \simeq 0$, ist $g(x)\,dg \simeq 0$. Da $g(x)^2$ standard und ungleich 0 ist, ist $g(x)^2 + g(x)\,dg$ nicht h-klein (denn sonst wäre $g(x)^2$ die Differenz zweier h-kleiner Zahlen und, da standard, gleich 0), der Kehrwert also beschränkt. Damit ist der gesamte Term auf der rechten Seite beschränkt. Geht man zu den Standardteilen über ergibt sich

$$
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
$$

□

Kombiniert man Satz 9 mit der Produktregel aus Satz 8 erhält man die allgemeine Quotientenregel.

Satz 10. *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ standard, differenzierbar und g überall ungleich 0. Dann ist auch $\frac{f}{g}$ standard und differenzierbar, und es gilt*

$$
\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{gf' - fg'}{g^2}.
$$

Kettenregel

Satz 11. *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbare Standardfunktionen und $f(D) \subseteq E$. Dann ist $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und*

$$
(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'
$$

Beweis. Wir verwenden die Differentiale

$$
df := f(x+dx) - f(x) \text{ und } dg := g(f(x)+df) - g(f(x))
$$

und rechnen

$$\begin{aligned} d(g \circ f) &= g(f(x + dx)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + df) - g(f(x)) \\ &= g(f(x)) + dg - g(f(x)) \\ &= dg \end{aligned}$$

Wenn $df \neq 0$, dann folgt

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Die Differentialquotienten auf der rechten Seite sind beschränkt, da f, g differenzierbar sind. Geht man zu den Standardteilen über, folgt die Behauptung

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Wenn $df = 0$, dann folgt $d(g \circ f) = dg = 0$ und daher ebenfalls die Behauptung. □

Potenzregel

Satz 12. *Sei $n \in \mathbb{N}$ standard und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Dann ist f standard und differenzierbar, und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Durch vollständige Induktion. □

4 Integralrechnung

Im Folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches, aber nicht entartetes) Intervall und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, also $a < b$.

4.1 Das Integral einer Treppenfunktion

Eine Treppenfunktion ist eine Funktion, die stückweise konstant ist und nur endlich oft den Funktionswert ändert. Genauer beschreibt dies die folgende

Definition 4. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine* Treppenfunktion, *wenn es $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(x_0, \ldots, x_n)$ mit $a = x_0$ und $b = x_n$ gibt sowie eine endliche Folge reeller Zahlen $(c_1, \ldots, c_n)$, sodass für alle $x \in [a, b]$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$\textit{Wenn } x_{k-1} < x < x_k, \textit{ dann } f(x) = c_k.$$

Bemerkungen

- Die Funktionswerte an den Punkten $x_0, \ldots, x_n$ sind durch Definition 4 nicht festgelegt, also beliebig.
- Die Folge $(x_0, \ldots, x_n)$ heißt eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$. Unter den Längen der n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ gibt es eine größte. Diese heißt die *Feinheit* oder die *Maschenweite* der Zerlegung. Ist die Maschenweite h-klein, nennen wir die Zerlegung *h-fein*.
- Zu zwei gegebenen Zerlegungen von $[a, b]$ gibt es eine vereinigte Zerlegung, die genau die Punkte der beiden gegebenen Zerlegungen enthält. Die Maschenweite der vereinigten Zerlegung ist höchstens so groß wie die der beiden gegebenen Zerlegungen. Insbesondere ist die Vereinigung zweier h-feiner Zerlegungen wieder h-fein.
- Sind f und g Treppenfunktionen über $[a, b]$ und ist $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g$ und cf Treppenfunktionen über $[a, b]$.[2]

Das Integral einer Funktion soll geometrisch der Fläche unter dem Graphen der Funktion entsprechen, wobei die Flächenanteile oberhalb der x-Achse positiv und die Flächenanteile unterhalb der x-Achse negativ zählen sollen. Bei einer Treppenfunktion führt dies auf eine Summe von Rechteckflächen gemäß der folgenden

Definition 5. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion und seien* $(x_0, \ldots, x_n)$ *und* $(c_1, \ldots, c_n)$ *wie in Definition 4 gegeben. Dann heißt*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

das Integral von f (von a bis b).

Diese Definition nimmt Bezug auf die Folgen $(x_0, \ldots, x_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$. Man kann sich aber leicht überlegen, dass verschiedene Folgen, die die gleiche Treppenfunktion beschreiben, zum gleichen Integral führen. Damit ist das Integral für Treppenfunktionen wohldefiniert.

Satz 13. *Sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion. Dann gilt:*

$$\text{Wenn } f(x) \simeq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], \text{ dann } \int_a^b f(x)\, dx \simeq 0.$$

Beweis. Sei die Treppenfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit einer Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$ und Funktionswerten $(c_1, \ldots, c_n)$ gemäß Definition 4 gegeben, und sei c das Maximum der $|c_k|$, $k = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| (x_k - x_{k-1}) \leq c(b - a) \simeq 0.$$

□

2. Falls du mit linearer Algebra vertraut bist: Die Treppenfunktionen über $[a, b]$ bilden einen *Vektorraum.*

4.2 Das Integral einer Standardfunktion

Definition 6. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Standardfunktion. Eine Standardzahl* $c \in \mathbb{R}$ *heißt* Integral von f*, wenn für alle h-feinen Zerlegungen* $(x_0, \dots, x_n)$ *von* $[a,b]$ *und für beliebige* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \dots, n)$ *gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \simeq c. \tag{12}$$

Wenn ein solches c *existiert, heißt* f integrierbar*. Die Summe in (12) heißt eine* Riemann'sche Summe*. Die* ξ_k *heißen die* Stützstellen *der Riemann'sche Summe.*

Da zwei Standardzahlen mit h-kleinem Abstand gleich sind, folgt aus Definition 6, dass das Integral, wenn es existiert, eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen es mit $\int_a^b f(x)\,dx$. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{st}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right)$$

für jede Riemann'sche Summe zu f mit einer h-feinen Zerlegung von $[a,b]$ und beliebigen Stützstellen. Der Buchstabe x in $\int_a^b f(x)\,dx$ wird *Integrationsvariable* genannt. Bei Bedarf verwenden wir auch andere Buchstaben als Integrationsvariable.

Bemerkung. Falls f eine Treppenfunktion ist und standard, führen die Definitionen 5 und 6 auf das gleiche Integral. Die Bezeichnungen sind also konsistent.

Direkt aus der Definition folgt

Satz 14. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Standardfunktion und* $s \in \,]a,b[$ *standard. Dann sind auch die Einschränkungen* $f|_{[a,s]}$ *und* $f|_{[s,b]}$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^s f(x)\,dx + \int_s^b f(x)\,dx.$$

Integralfunktion

Wir betrachten jetzt das Integral einer Standardfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von einer der Integrationsgrenzen, die wir mit der Variablen x bezeichnen. Als Integrationsvariable verwenden wir daher jetzt einen anderen Buchstaben, zum Beispiel t.

Sei $a \in I$ standard und für alle standard $x \in I$ existiere

- das Integral von $f|_{[x,a]}$, falls $x < a$,
- das Integral von $f|_{[a,x]}$, falls $a < x$.

Definieren wir noch

$$\int_a^a f(t)\,dt := 0 \quad \text{und} \quad \int_a^x f(t)\,dt := -\int_x^a f(t)\,dt, \text{ für } x < a, \tag{13}$$

dann ist jedem standard $x \in I$ eindeutig eine Standardzahl $\int_a^x f(t)\,dt$ zugeordnet. Nach Axiom **S** gibt es dann eine Standardfunktion $F_a\colon I \to \mathbb{R}$, sodass für alle standard $x \in I$ gilt:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{14}$$

Nach Satz 14 unter Berücksichtigung von (13) und (14) gilt für alle standard $x_1, x_2 \in I$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{x_2} f(t)\,dt = F_a(x_2) - F_a(x_1). \tag{15}$$

Wir können so den Integralbegriff auf den Fall beliebiger Integrationsgrenzen aus I ausdehnen, indem wir für alle himmlischen $x_1, x_2 \in I$ *definieren*:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt := F_a(x_2) - F_a(x_1). \tag{16}$$

Bemerkungen

1. Das in (16) definierte Integral ist für alle $a \in I$ gleich und damit unabhängig von der konkreten Wahl von a (Übung!).
2. Jede konventionelle Aussageform mit den Variablen x_1, x_2 als Integrationsgrenzen (und ansonsten höchstens noch Standardparametern), die für alle standard x_1, x_2 bewiesen ist, gilt dann nach dem Transferaxiom für alle $x_1, x_2 \in I$.
3. Im Folgenden verwenden wir wieder die vertrauten Variablen a, b als Integrationsgrenzen, brauchen aber wegen der vorherigen Bemerkung nicht mehr zu verlangen, dass diese standard sind.

Linearität und Monotonie des Integrals

Satz 15. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Standardfunktionen und $c \in \mathbb{R}$ standard. Dann gilt für alle $a, b \in I$ mit $a < b$:*

1. *Wenn $f|_{[a,b]}$ und $g|_{[a,b]}$ integrierbar sind, dann ist $(f+g)|_{[a,b]}$ integrierbar und*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Wenn $f|_{[a,b]}$ integrierbar ist, dann ist $(cf)|_{[a,b]}$ integrierbar und*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Wenn $f|_{[a,b]}$ und $g|_{[a,b]}$ integrierbar sind und $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Für standard a, b folgen die Aussagen aus den entsprechenden Rechenregeln für endliche Summen und für Standardteile. Die Verallgemeinerung gilt nach dem Transferaxiom. □

Die Punkte 1 und 2 aus Satz 15 beschreiben die *Linearität* und Punkt 3 die *Monotonie* des Integrals.

4.3 Das Integral einer stetigen Funktion

Stetige Funktionen

Definition 7. *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Standardfunktion und $x_0 \in D$ standard. Die Funktion f heißt* stetig an der Stelle x_0*, wenn für alle $x \in D$ gilt:*

$$\text{Wenn } x \simeq x_0, \text{ dann } f(x) \simeq f(x_0).$$

Die Funktion f heißt stetig*, wenn sie an jeder Standardstelle ihres Definitionsbereichs stetig ist.*

Mit der Differentialschreibweise aus Abschnitt 3 können wir das auch so ausdrücken: f ist stetig an der Stelle x_0, wenn dort gilt: Aus $dx \simeq 0$ folgt $df = f(x_0+dx) - f(x_0) \simeq 0$. Daraus folgt, dass jede an der Standardstelle x_0 differenzierbare Standardfunktion dort auch stetig ist.

Satz 16. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$:*

$$\text{Wenn } x_1 \simeq x_2, \text{ dann } f(x_1) \simeq f(x_2).$$

Beweis. Da f standard ist, sind auch $[a, b]$ und damit a, b standard. Für alle $x \in [a, b]$ gilt $a \leq x \leq b$. Geht man zu den Standardteilen über folgt

$$a = \mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(b) = b. \tag{17}$$

Für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ liegen also auch deren Standardteile in $[a, b]$. Wenn $x_1 \simeq x_2$, dann ist $\mathrm{st}(x_1) = \mathrm{st}(x_2)$ und, da f stetig ist, folgt

$$f(x_1) \simeq f(\mathrm{st}(x_1)) = f(\mathrm{st}(x_2)) \simeq f(x_2).$$

□

Satz 17. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion und $[a, b] \subseteq D$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ einen kleinsten und einen größten Wert an. Das heißt, es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$, sodass für alle $x \in [a, b]$ gilt:*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass a, b standard sind. Sei $(x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle. Unter den Funktionswerten $f(x_0), \dots, f(x_n)$ gibt es einen kleinsten, der erstmals bei einem bestimmten Index, sagen wir k, angenommen wird, und einen größten, der erstmals bei einem bestimmten Index, sagen wir l, angenommen wird. Dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, n\}$

$$f(x_k) \leq f(x_i) \leq f(x_l). \tag{18}$$

Da a, b standard sind, sind x_k, x_l beschränkt. Daher existieren die Standardteile, und wir definieren $\check{x} := \mathrm{st}(x_k)$ und $\hat{x} := \mathrm{st}(x_l)$. Wie bei (17) folgt $\check{x}, \hat{x} \in [a, b]$. Da f stetig und standard ist, folgen $f(\check{x}) = \mathrm{st}(f(x_k))$ und $f(\hat{x}) = \mathrm{st}(f(x_l))$.

Ist $n \gg 1$, so gibt es für alle standard $x \in [a, b]$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x = \mathrm{st}(x_i)$ und (wieder, weil f stetig und standard ist) $f(x) = \mathrm{st}(f(x_i))$. Nimmt man in (18) die Standardteile, folgt

$$f(\check{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x})$$

für alle standard $x \in [a, b]$. Nach dem Transferxiom gilt diese Ungleichung dann für alle $x \in [a, b]$. Daher nimmt f in $[a, b]$ den kleinsten Wert in $\check{x}$ und den größten Wert in $\hat{x}$ an.

Damit ist der Satz für alle standard $a, b \in I$ bewiesen. Nach dem Transferaxiom gilt er daher für alle $a, b \in I$. □

Satz 18. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion und $[a, b] \subseteq D$. Dann ist $f|_{[a,b]}$ integrierbar.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass a, b standard sind. Wir müssen zeigen, dass für jede h-feine Zerlegung (und beliebige Stützstellen) die Riemann'sche Summe beschränkt ist und den gleichen Standardteil hat.

Sei $(x_0, \dots, x_n)$ eine h-feine Zerlegung von $[a, b]$ und seien $\xi_1, \dots, \xi_n$ beliebige Stützstellen. Als stetige Funktion nimmt f in $[a, b]$ einen kleinsten Wert $\check{y}$ und einen größten Wert $\hat{y}$ an. Da f standard ist, sind auch $\check{y}$ und $\hat{y}$ standard, und es gilt

$$\check{y}(b - a) = \check{y} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \hat{y} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \hat{y}(b - a).$$

Da $\check{y}(b - a)$ und $\hat{y}(b - a)$ standard sind, ist die Riemann'sche Summe in der Mitte beschränkt.

Seien nur zwei h-feine Zerlegungen von $[a, b]$ und dazu jeweils Stützstellen gegeben. Seien weiter f_1 und f_2 zwei Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die in den Teilintervallen der ersten bzw. zweiten Zerlegung konstant gleich dem Funktionswert von f an der jeweiligen Stützstelle sind. Dann sind die Integrale von f_1 und f_2 gerade die Riemann'schen Summen zur ersten bzw. zweiten Zerlegung. Wir müssen also zeigen, dass ihre Differenz h-klein ist. Wegen der Linearität des Integrals ist die Differenz

$$\int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx \tag{19}$$

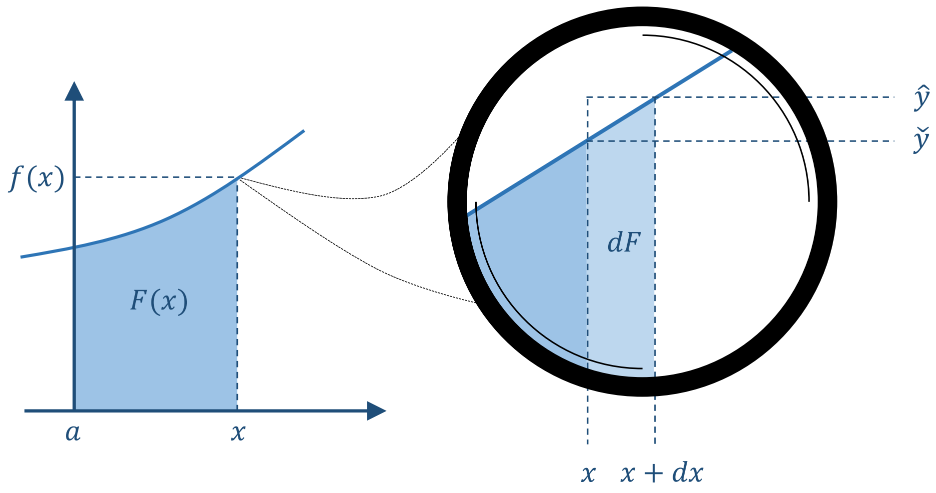

Abbildung 5: Skizze zum Beweis des Hauptsatzes

$f_1 - f_2$ ist eine Treppenfunktion zu der (ebenfalls h-feinen) Vereinigung der beiden gegebenen Zerlegungen. An jeder Stelle $x \in [a, b]$ sind die Funktionswerte $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gleich dem Funktionswert von f an einer h-nahen Stützstelle ξ_i der ersten bzw. η_j der zweiten Zerlegung. Nach Satz 16 ist daher

$$f_1(x) \simeq f(\xi_i) \simeq f(\eta_j) \simeq f_2(x).$$

Mit Satz 13 folgt, dass die Differenz der Integrale in 19 und damit die Differenz der Riemann'schen Summen zu den beiden Zerlegungen h-klein ist.

Damit ist der Satz für standard a, b bewiesen. Nach dem Transferaxiom gilt er allgemein. $\square$

Die Rechteckeigenschaft des Integrals

Satz 19. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion, $[a, b] \subseteq D$, und seien $\check{y}$ das Minimum und $\hat{y}$ das Maximum von f, eingeschränkt auf $[a, b]$. Dann gilt*

$$\check{y}(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \hat{y}(b-a).$$

Beweis. $\check{y}(b-a)$ und $\hat{y}(b-a)$ sind die Integrale der auf $[a, b]$ konstanten Funktionen mit Funktionswert $\check{y}$ bzw. $\hat{y}$. Daher folgt die Behauptung aus der Monotonie des Integrals. $\square$

5 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 20. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion und $a \in I$ standard. Für $x \in I$ sei*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist die Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ standard und differenzierbar, und es gilt $F' = f$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle standard $x \in I$ die Ableitung von F an der Stelle x existiert und gleich $f(x)$ ist.

Wir definieren das Differential

$$dF := F(x+dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt.$$

Anschaulich ist dF die Vergrößerung der Fläche unter dem Funktionsgraphen, wenn rechte Grenze von x nach $x + dx$ verschieben. Aufgrund der Rechteckeigenschaft des Integrals gilt

$$\check{y} \cdot dx \le dF \le \hat{y} \cdot dx, \tag{20}$$

wobei $\check{y}$ das Minimum und $\hat{y}$ das Maximum von f im Intervall $[x, x+dx]$ ist (siehe Abb. 5). Da f stetig ist, liegen $\check{y}$ und $\hat{y}$ himmlisch nah bei der Standardzahl $f(x)$. Wenn man (20) durch dx teilt und zu den Standardteilen übergeht, erhält man daher

$$f(x) = \operatorname{st}(\check{y}) \le \operatorname{st}\left(\frac{dF}{dx}\right) \le \operatorname{st}(\hat{y}) = f(x). \tag{21}$$

Also gilt in (21) durchgängig die Gleichheit, was bedeutet, dass die Ableitung von F an der Stelle x existiert und $F'(x) = f(x)$ ist. □

Satz 21. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Standardfunktion und F eine Stammfunktion von f (das heißt $F' = f$). Dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Dies folgt wie üblich aus Satz 20, weil die Differenz zweier Stammfunktionen konstant ist. □

6 Ausblick: Analysis für Himmelsfunktionen

Bisher haben wir haben wir in unseren Ausführungen zur Differential- und Integralrechnung nur *Standardfunktionen* betrachtet. Da alle Funktionen, die wir konkret angeben können, standard sind, erscheint diese Einschränkung zunächst akzeptabel. Aus theoretischer Sicht liegt es aber nahe zu fragen, inwieweit die Begriffe und Sätze der Himmlischen Analysis auch auf Himmelsfunktionen anwendbar sind. Hat zum Beispiel die Funktion x^n eine Ableitung und ist diese gleich nx^{n-1}, auch wenn n eine Himmelszahl ist? Gilt der

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch für Himmelsfunktionen und wenn ja, was bedeutet er dann? Solche Fragen können wir im Moment noch nicht beantworten.

Tatsächlich ist es möglich, die für Standardfunktionen eingeführten Begriffe *Stetigkeit*, *Ableitung*, *Integral* mit Axiom **S** auf Himmelsfunktionen auszudehnen und die bewiesenen Sätze mit Axiom **T** entsprechend zu verallgemeinern. Das gleiche Rezept haben wir im Prinzip bereits angewandt, als wir den Begriff der Ableitung über die Ableitungsfunktion auf himmlische Stellen des Definitionsbereichs und den Begriff des Integrals über die Integralfunktion auf himmlische Integrationsgrenzen ausgedehnt haben. Jetzt verwenden wir das Rezept, um die Begriffe auf Himmelsfunktionen auszudehnen.

6.1 Begriffserweiterungen

$\mathcal{F}$ sei die Menge aller reellwertigen Funktionen f, deren Definitionsbereich $\mathrm{Def}(f)$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Die Menge $\mathcal{F}$ ist konventionell definiert, also standard.

Wir formulieren nun Aussageformen, die uns im Standardfall über eine „binäre Ausgabevariable" y mitteilen, ob in der jeweils betrachteten Situation Stetigkeit, Differenzierbarkeit bzw. Integrierbarkeit vorliegt.

Stetigkeit

$\mathrm{STET}(f, x, y)$ sei die Aussageform

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f \in \mathcal{F} \text{ standard}, x \in \mathbb{R} \text{ standard} \\ & \text{und } f \text{ stetig in } x \text{ gemäß Definition 7}, \\ \text{dann} & y = 1, \\ \text{sonst} & y = 0. \end{array}$$

Diese Aussageform bestimmt zu allen standard $(f, x) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}$ genau ein standard y, das entweder (im „Wenn-Fall") gleich 1 oder (im „Sonst-Fall") gleich 0 ist. Nach Axiom **S** gibt es genau eine Standardfunktion

$$\mathrm{stet}\colon \mathcal{F} \times \mathbb{R} \to \{0, 1\}$$

sodass für alle standard f, x gilt:

$$\mathrm{stet}(f, x) = y \text{ genau dann, wenn } \mathrm{STET}(f, x, y).$$

Die Funktion stet zeigt also für alle standard f, x an, ob f in x stetig ist (Wert 1) oder nicht (Wert 0). Daher definieren wir für alle Himmelsfunktionen $f \in \mathcal{F}$ und alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f \text{ ist stetig in } x \text{ genau dann, wenn } \mathrm{stet}(f, x) = 1. \tag{22}$$

Ableitung

DIFFB(f, x, c, y) sei die Aussageform

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f \in \mathcal{F} \text{ standard}, x, c \in \mathbb{R} \text{ standard} \\ & \text{und } f \text{ differenzierbar in } x \text{ gemäß Definition 3,} \\ & \text{und } c = f'(x), \\ \text{dann} & y = 1, \\ \text{sonst} & y = 0. \end{array}$$

Diese Aussageform bestimmt zu allen standard $(f, x, c) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau ein standard y, das entweder (im „Wenn-Fall") gleich 1 oder (im „Sonst-Fall") gleich 0 ist. Nach Axiom **S** gibt es genau eine Standardfunktion

$$\text{diffb}\colon \mathcal{F} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0, 1\},$$

sodass für alle standard f, x gilt:

$$\text{diffb}(f, x, c) = y \text{ genau dann, wenn DIFFB}(f, x, c, y).$$

Die Funktion diffb zeigt also für alle standard f, x, c an, ob f in x differenzierbar ist und dort die Ableitung c hat (Wert 1) oder nicht (Wert 0). Daher definieren wir für alle Himmelsfunktionen $f \in \mathcal{F}$ und alle $x, c \in \mathbb{R}$:

$$f \text{ ist differenzierbar in } x \text{ und hat dort die Ableitung } c \text{ genau dann, wenn } \text{diffb}(f, x, c) = 1. \tag{23}$$

Die Ableitung ist auch in diesem Fall eindeutig bestimmt, denn wenn es für alle standard f, x höchstens ein c mit $\text{diffb}(f, x, c) = 1$ gibt, dann gilt das nach dem Transferaxiom für alle f, x. Wir bezeichnen die Ableitung wieder mit $f'(x)$.

Integral

INTB(f, a, b, c, y) sei die Aussageform

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f \in \mathcal{F} \text{ standard}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ standard}, a < b \\ & \text{und Def}(f) = [a, b] \\ & \text{und } f \text{ integrierbar gemäß Definition 6,} \\ & \text{und } c = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx, \\ \text{dann} & y = 1, \\ \text{sonst} & y = 0. \end{array}$$

Diese Aussageform bestimmt zu allen standard $(f, a, b, c) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau ein standard y, das entweder (im „Wenn-Fall") gleich 1 oder (im „Sonst-Fall") gleich 0 ist. Nach Axiom **S** gibt es genau eine Standardfunktion

$$\text{intb}\colon \mathcal{F} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0, 1\},$$

sodass für alle standard f, a, b, c gilt:

$$\operatorname{intb}(f, a, b, c) = y \text{ genau dann, wenn } \operatorname{INTB}(f, a, b, c, y).$$

Die Funktion intb zeigt also für alle standard f, a, b, c an, ob der Definitionsbereich von f das Intervall $[a, b]$ ist und das Integral von f gleich c ist (Wert 1) oder nicht (Wert 0). Daher definieren wir für alle Himmelsfunktionen $f \in \mathcal{F}$ und alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist integrierbar und hat das Integral } c \text{ genau dann, wenn } \operatorname{intb}(f, a, b, c) = 1. \tag{24}$$

Das Integral ist auch in diesem Fall eindeutig bestimmt, denn wenn es für alle standard f, a, b höchstens ein c mit $\operatorname{intb}(f, a, b, c) = 1$ gibt, dann gilt das nach dem Transferaxiom für alle f, a, b. Wir bezeichnen das Integral wieder mit $\int_a^b f(x)\,dx$.

6.2 Transfer von Sätzen

Die Begriffserweiterungen aus Abschnitt 6.1 sind mit den bisherigen Definitionen verträglich und sinnvoll, da sich so alle konventionellen Sätze, die wir für Standardfunktionen bewiesen haben, mit Axiom **T** auf Himmelsfunktionen übertragen lassen. Die so verallgemeinerten Definitionen von Stetigkeit, Ableitung und Integral sind zudem vollständig äquivalent zu den entsprechenden Epsilon-Delta-Definitionen aus konventionellen Analysiskursen (für einen Beweis siehe zum Beispiel Kuhlemann 2024).

7 Zum Hintergrund der Himmlischen Analysis

Die Himmlische Analysis beruht auf der *Internen Mengenlehre* (engl. *Internal Set Theory*, kurz IST) von Edward Nelson (Nelson 1977). Dort wird die konventionelle mathematische Theorie (genauer, die Zermelo-Frarnkel'sche Mengenlehre mit Auswahlaxiom, kurz ZFC) um den neuen Begriff *standard* und drei neue Axiome **I**, **S** und **T** erweitert.

Das Axiom **T** in IST entspricht dabei vollständig unserem Axiom **T** in Abschnitt 2.3. Das Axiom **S** wird in IST für Mengen (anstatt für Funktionen) formuliert, ist aber äquivalent zu unserem Axiom **S** in Abschnitt 2.4. Das Axiom **I** ist eine Verallgemeinerung unseres Axioms **H** und ermöglicht, IST in allgemeineren Kontexten wie Topologie, Funktionalanalysis und Stochastik einzusetzen. In Tabelle 1 stellen wir die Begriffe der Himmlischen Analysis den entsprechenden Begriffen in IST gegenüber.

IST gehört zu einer Gruppe von Theorien der sogenannten *axiomatischen Nonstandard-Analysis* und ist eine *konservative* Erweiterung von ZFC. Das bedeutet: Jede konventionelle Aussage, die in IST beweisbar ist, ist bereits in ZFC beweisbar. Der Mehrwert von IST liegt darin, dass sie neue Methoden bereitstellt, die Beweise oft schlanker und intuitiver machen und das Finden von Beweisen befördern können.

Schränkt man Axiom **S** auf parameterfreie Aussageformen ein und fordert die Existenz des Standardteils für beschränkte reelle Zahlen axiomatisch, erhält man eine Teiltheorie von IST, die konservativ über ZF ist, das heißt, das Auswahlaxiom spielt hier keine

Tabelle 1: Gegenüberstellung zentraler Begriffe

Himmlische Analysis	Internal Set Theory (IST)
himmlisch	non-standard
standard	standard
beschränkt	limited
himmlisch groß (h-groß)	unlimited
himmlisch klein (h-klein)	infinitesimal
himmlisch nah	infinitely close
konventionelle Aussageform	internal formula
nicht-konventionelle Aussageform	external formula

Rolle (siehe Hrbaček und Katz 2021). Dies ist grundlagentheoretisch von Bedeutung, da der Nonstandard-Analysis oft eine Abhängigkeit vom inkonstruktiven Auswahlaxioms unterstellt wird.

Literaturverzeichnis

Hrbaček, Karel und Mikhail G. Katz. 2021. Infinitesimal analysis without the axiom of choice. *Annals of Pure and Applied Logic* 172 (6): 102959. https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102959.

Kuhlemann, Karl. 2024. *In der Hochschul-Didaktik, Logik und Philosophie.* De Gruyter. ISBN: 9783111229027.

Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 (6): 1165–1198.